Matematická analýza NOFY151, ZS 20/21, Cvičení s L. Krumpem

Písemka č. 2, 1.12.2020, 9:00 – Řešení

1. (4 body) Určete derivaci funkce

$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$$

ve všech bodech, kde existuje, včetně jednostranných derivací.

Snadno zjistíme, že pro každé reálné x je $e^{-x^2} \leq 1$, takže $D_f = \mathbb{R}$. Zderivujeme:

$$f'(x) = \frac{-e^{-x^2}(-2x)}{2\sqrt{1 - e^{-x^2}}} = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}.$$

Tato derivace ovšem není definována v bodě 0, protože v něm je jmenovatel nulový. Proto počítáme jednostranné derivace v nule jako limity:

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x \to 0\pm} \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}} = \lim_{x \to 0\pm} \frac{x}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}},$$

protože e^{-x^2} je v nule spojitá s hodnotou 1. Dále si všimneme, že výraz pod odmocninou můžeme doplnit na známou limitu s exponenciálou, takže s dvojím použitím věty o limitě složené funkce dostáváme

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x \to 0\pm} \sqrt{\frac{x^2}{1 - e^{-x^2}}} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0\pm} \sqrt{\frac{-x^2}{e^{-x^2} - 1}} \operatorname{sgn}(x) = 1 \cdot (\pm 1) = \pm 1.$$

Většině z vás nečinilo problém spočítat derivaci v „běžných bodech“, i když několik z vás nedokázalo ani to. Někteří jste sice derivaci správně spočetli, ale neobjevili jste problematický bod $x = 0$. Nejčastějším problémem ale bylo, že jste sice tento bod objevili, ale počítali jste jednostranné limity f' v nule tak, že jste většinou nikam nedošli. Přitom stačilo si všimnout, že e^{-x^2} se dá z limity hned odstranit a zbytek vede na známou limitu s exponenciálou.

Hodnotil jsem takto: derivace v běžném bodě: 1b, nalezení $D_f, D_{f'}$: 1b, výpočet $f'_{\pm}(0)$: 2b.

2. (6 bodů) Spočtěte primitivní funkci

$$\int \frac{\ln^3 x + 1}{x(\ln^2 x - \ln x)} dx$$

na maximálních možných intervalech a určete tyto intervaly.

Volíme substituci $y = \ln x, dy = \frac{dx}{x}$, takže zadaný integrál převádíme na

$$\int \frac{y^3+1}{y^2-y} dy.$$

To je racionální funkce, která má v čitateli vyšší stupeň než ve jmenovateli, takže napřed musíme vhodnou úpravou stupeň čitatele snížit. Obecně se to dá dělat dělením polynomů, tady se to dá „vykoukat“, tj. odečítat a přičítat v čitateli šikovné členy tak, aby se nám to krátilo:

$$\int \frac{y^3+1}{y^2-y} dy = \int \left(\frac{y^3-y^2}{y^2-y} + \frac{y^2-y}{y^2-y} + \frac{y+1}{y^2-y} \right) dy = \int \left(y+1+\frac{y+1}{y^2-y} \right) dy.$$

Teprve na poslední zlomek můžeme aplikovat rozklad na parciální zlomky, který zde vyjde

$$\frac{y+1}{y^2-y} = \frac{-1}{y} + \frac{2}{y-1},$$

takže máme

$$\int \left(y+1+\frac{-1}{y}+\frac{2}{y-1} \right) dy = \frac{y^2}{2} + y - \ln|y| + 2\ln|y-1| + c$$

a hledaná primitivní funkce bude

$$\frac{\ln^2 x}{2} + \ln x - \ln|\ln x| + 2\ln|\ln x - 1| + c.$$

Intervaly, na nichž je definovaná původní i primitivní funkce, jsou $(0,1) \cup (1,e) \cup (e,+\infty)$.

Skoro každý z vás zvolil správnou substituci. Někteří jste ovšem kdovíproč nechali proměnnou x i v novém integrálu s novou proměnnou, což ovšem nejde. Nejvíce opakovanou chybou bylo ale to, že jste nesnížili stupeň polynomu v čitateli a snažili jste se aplikovat rozklad na parc. zlomky na celý zlomek $\frac{y^3+1}{y^2-y}$, což nejde. To můžete udělat pouze když má čitatel menší stupeň než jmenovatel. Většinou jste mechanicky použili zakrývací metodu, vyšla vám hezká čísla v čitatelích a s nimi jste to pak „dopočítali“. (Mimochodem tato dvě čísla, tedy -1 a 2, vyšla stejně jako u správného postupu, ale to jen „náhodou“, takže jsem to nemohl uznávat jako „aspoň část správného řešení“.) Kdybyste si však pro kontrolu oba zlomky sečetli, zjistili byste svůj omyl. Také jste někdy zapomínali na intervaly platnosti nebo jste je měli chybně.

Hodnotil jsem takto: substituce: 1b, odečtení členů vysokého stupně v čitateli: 1b, rozklad na parc. zlomky: 1b, výpočet integrálu substituované funkce: 1b, dosazení a získání integrálu původní funkce: 1b, intervaly: 1b.

Lukáš Krump, 7.12.2020