Matematická analýza NOFY151, ZS 20/21, Cvičení s L. Krumpem

Písemka č. 1, 27.10.2020, 12:20 – Řešení.

1. (5 bodů) Dokažte matematickou indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je číslo $n^3 + 11n$ dělitelné šesti.

První indukční krok ($n = 1$): $1^3 + 11 = 12$, což dělitelné šesti je.

Druhý indukční krok: předpokládáme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ je číslo $n^3 + 11n$ dělitelné šesti a chceme totéž zjistit o čísle

$$(n+1)^3 + 11(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 11n + 11 = (n^3 + 11n) + 3(n^2 + n) + 12.$$

Dle indukčního předpokladu je dělitelný šesti jeho první sčítanec $(n^3 + 11n)$ a zřejmě také sčítanec 12. Zbývá ověřit dělitelnost šesti u prostředního sčítance, a ta plyne snadno z faktu, že $n^2 + n = n(n+1)$ je vždy sudé číslo.

2. (5 bodů) Spočtěte limitu

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+x^2} - \sqrt[3]{8-x^2}}{x((x+1)^2 - (x-1)^2)}$$

Výraz rozšíříme vhodným výrazem a zároveň upravíme jmenovatele

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+x^2} - \sqrt[3]{8-x^2}}{x(x^2+2x+1-(x^2-2x+1))} \cdot \frac{\sqrt[3]{(8+x^2)^2} + \sqrt[3]{(8+x^2)(8-x^2)} + \sqrt[3]{(8-x^2)^2}}{\sqrt[3]{(8+x^2)^2} + \sqrt[3]{(8+x^2)(8-x^2)} + \sqrt[3]{(8-x^2)^2}} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(8+x^2)-(8-x^2)}{4x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(8+x^2)^2} + \sqrt[3]{(8+x^2)(8-x^2)} + \sqrt[3]{(8-x^2)^2}} \end{aligned}$$

Nyní využijeme věty o limitě součinu a toho, že v druhé limitě máme spojitou funkci, do které tedy stačí dosadit $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(8+x^2)^2} + \sqrt[3]{(8+x^2)(8-x^2)} + \sqrt[3]{(8-x^2)^2}} = \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12}.$$

První limitu upravíme a zkrátíme x^2:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(8+x^2)-(8-x^2)}{(4x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Celkově tedy

$$L = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}.$$