Matematická analýza NOFY151, ZS 20/21, Cvičení s L. Krumpem

Písemka č. 1, 27.10.2020, 9:00 – Řešení.

1. (5 bodů) Dokažte matematickou indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

První indukční krok ($n = 1$): $1 \cdot 1! = 2! - 1$ platí.

Druhý indukční krok: Předpokládáme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

a chceme dokázat, že platí též

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+2)! - 1. \tag{1}$$

Podle indukčního předpokladu je levá strana (1) rovna

$$(n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1+1) \cdot (n+1)! - 1 = (n+2)! - 1$$

a tvrzení je dokázáno.

2. (5 bodů) Spočtěte limitu

$$L = \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{13+x} - \sqrt{19-x}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 1}$$

Výraz vhodně rozšíříme (dvěma výrazy), čímž dostáváme

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{13+x} + \sqrt{19-x}}{\sqrt{13+x} + \sqrt{19-x}} \cdot \frac{\sqrt{13+x} - \sqrt{19-x}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4} + 1}{\sqrt{x^2 - 4x + 4} + 1} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4} + 1}{\sqrt{13+x} + \sqrt{19-x}} \cdot \lim_{x \to 3} \frac{(13+x) - (19-x)}{x^2 - 4x + 4 - 1}. \end{aligned}$$

Nyní využijeme věty o limitě součinu a toho, že v první z limit je spojitá funkce, takže do ní lze dosadit $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4} + 1}{\sqrt{13+x} + \sqrt{19-x}} = \frac{\sqrt{1} + 1}{\sqrt{16} + \sqrt{16}} = \frac{1}{4}.$$

Druhou limitu v součinu musíme ještě upravit s cílem pokrátit člen $(x-3)$, který se v čitateli i jmenovateli v bodě 3 nuluje:

$$\lim_{x \to 3} \frac{(13+x) - (19-x)}{x^2 - 4x + 4 - 1} = \lim_{x \to 3} \frac{2x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \to 3} \frac{2(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{2}{(x-1)} = 1.$$

Celkově tedy

$$L = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

Trochu jiný postup: někteří z vás si všimli, že výraz $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, takže můžeme rovnou pracovat s jeho odmocninou. Zde je ovšem malý chyták: $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = |x-2|$ a abychom místo toho mohli psát $x - 2$ (bez absolutní hodnoty), musíme vědět, že $x - 2$ je nezáporné. Tato podmínka je jistě splněná na nějakém dostatečně malém okolí bodu $x = 3$, ale pokud jste tam toto nepoznamenali, nebo bez vysvětlení psali $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = x - 2$, strhával jsem bod.