JMÉNO A PŘÍJMENÍ: JOSEF MÁLEK

① Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dána předpisem: $f(x) = \begin{cases} |\sin x| \cos \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

JE f SPOJITÁ V $x=0$? ANO NE — ZAKROUŽKUJTE VAŠI ODPOVĚĎ.

PROČ? NAPIŠTE ODŮVODNĚNÍ: Neboť $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)}$. Víme, že $\boxed{f(0)=1}$

a protože $\cos\frac{1}{x^2}$ je omezená fce, tak na $P_\delta(0)$: $0 \leq |\sin x| \cos \frac{1}{x^2} \leq |\sin x|$,

a protože $\lim_{x\to 0} |\sin x| = 0$, dle sendvičové věty $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 0}$

② Je-li $f(x) = \sqrt{1+x^4 e^{3x}}$. Pak ① $D_f =$: $\boxed{e^{3x} > 0,\ x^4 \geq 0,\ 1+x^4e^{3x} > 0 \text{ v } \mathbb{R}}$ $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

(ii) $$f'(x) = \left[(1+x^4e^{3x})^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(1+x^4e^{3x})^{-\frac{1}{2}}(x^4e^{3x})'$$

derivování součin $$= \frac{4x^3e^{3x}+3x^4e^{3x}}{2\sqrt{1+x^4e^{3x}}} = \frac{(4+3x)x^3e^{3x}}{2\sqrt{1+x^4e^{3x}}}$$

③ V bodech otevřených intervalů, kde je funkce $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ spočtěte $f'(x)$. (D_f nehledejte)

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)^2} \cdot \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-\left[(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2\right]}{\frac{(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{(\sin x - \cos x)^2}} = \underline{\underline{-1}}$$

④ Spočtěte $L := \lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - 2\cos x + 1}{x^2}$, aniž byste použili l'Hospitalovo pravidlo.

Řešení ①
$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 2\cos x + 1 - \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\cos x - 1}{x^2}\right)^2 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{\cos x - 1}{x^2}\right)^2}_{\to (\frac{1}{2})^2} \underbrace{x^2}_{\to 0} - \lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{\to 1} = \underline{\underline{-1}}$$

Řešení ②
$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{x^2} = 2 \lim_{x\to 0} \underbrace{\cos x}_{\to 1} \underbrace{\left(\frac{\cos x - 1}{x^2}\right)}_{\to -1/2} = \underline{\underline{-1}}$$

⑤ Buď $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x^{\alpha}), & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ $\boxed{D_f = \langle 0, +\infty)}$

(i) Určete, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je f spojitá v 0 zprava.

Zkoumejme $\lim_{x\to 0} \ln(1+x^{\alpha})$. Platí:

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \alpha>0 \\ 1 & \text{pro } \alpha=0 \\ +\infty & \text{pro } \alpha<0 \end{cases} \Rightarrow \text{Odtud } \lim_{x\to 0} \ln(1+x^{\alpha}) = 0 \text{ (a } f \text{ je spojitá v 0) pro } \boxed{\alpha>0}$$

(ii) Spočtěte $f'(x)$ pro $x>0$ a $f'(0)$ zprava (dle defini

$\boxed{x>0}$: $f'(x) = \dfrac{\alpha x^{\alpha-1}}{1+x^{\alpha}}$

$x=0$

$$f'(0+) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(0+x) - \overbrace{f(0)}^{=0}}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+x^{\alpha})}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\ln(1+x^{\alpha})}{x^{\alpha}}}_{\to 1} x^{\alpha-1}$$

$\boxed{\text{uvažujme jen } \alpha>0}$ nebot jen tam je f v 0 spojitá.

$$= \lim_{x\to 0+} x^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & \alpha>1 \\ 1 & \alpha=1 \\ +\infty & \alpha\in(0,1) \end{cases} \quad \text{(A)}$$

(iii) Pro jaká α je f' spojitá v 0 zprava?

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1+x^{\alpha}} = \begin{cases} 0 & \alpha>1 \\ 1 & \alpha=1 \\ +\infty & \alpha\in(0,1) \end{cases} \quad \text{(B)}$$

Srovnáním (A) a (B) vidíme, že f' je spojitá v 0 pro $\boxed{\alpha \geq 1}$

neboť pro $\alpha\in(0,1)$ není $f'(0+)$ hodnota z $\mathbb{R}$ (limita není vlastní!)