Druhý zápočtový test Jméno a příjmení: J.M.

Příklad:	1	2	3	4	Celkem
Získané body:					
Maximální počet bodů	2	3	2	3	10

[2b] 1. Spočtěte :

$$L := \lim_{x\to 0} \left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$$

Řešení

$$L \underset{\uparrow}{=} \exp\left[\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos x}\, \frac{\ln\left(1+\sin^2 x\right)}{\sin^2 x}\, \sin^2 x\right]$$ 1 bod

spojitost exponenciály

$$= \exp\left[\lim_{x\to 0} \frac{1}{\underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right] = \exp 2 = \underline{\underline{e^2}}$$

0.2

využijeme :

$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$ 0,5

$\to y = \sin^2 x$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ 0,3

$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1$ 0,2

[3b] 2. Nechť

$$f(x) = \sqrt{x-\sqrt[3]{x}} - \sqrt{2-\sqrt[3]{2}}.$$

(a) Určete definiční obor funkce f a ve vnitřních bodech definičního oboru spočtěte derivaci f'.

(b) Vysvětlete proč existuje k f na intervalu $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ funkce inverzní (označme ji f^{-1}) a proč $f^{-1}(0) = 2$.

(c) Spočtěte derivaci inverzní funkce v bodě 0, tj. určete $[f^{-1}]'(0)$.

$\boxed{\text{Ad (a)}}$ $D_f = \{x\in\mathbb{R};\ x-\sqrt[3]{x} \geq 0\}$. Protože $x-\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt[3]{x}-1\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow$ ~~$x\in$~~ $\underset{-1}{|}\ {+}{+}{+}\ \underset{0}{|}\ {-}{-}{-}\ \underset{1}{|}\ {+}{+}{+}$, tak $\underline{\underline{D_f = \langle -1, 0\rangle \cup \langle 1, +\infty)}}$ 0,5

v $(-1,0)\cup(1,+\infty)$: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-\sqrt[3]{x}}}\left(1-\frac{1}{3}\frac{1}{x^{2/3}}\right) = \frac{3x^{2/3}-1}{6x^{2/3}\sqrt{x-\sqrt[3]{x}}}$ 1

$\boxed{\text{Ad (b)}}$ z předchozího :

$f'(x) > 0$ pokud $x^{2/3} > \frac{1}{3}$ a jmenovatel je kladný.

Tedy určitě $f'(x) > 0$ na $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ a tak $f^{-1}: f\left(\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)\right) \xrightarrow{\text{na}} \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ prostě

$\Rightarrow f$ je rostoucí na 0.6

Protože $f(2) = 0$, tak $f^{-1}(0) = 2$. 0.2

$\boxed{\text{Ad (c)}}$ Platí:

$$[f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \text{ a tedy } [f^{-1}]'(0) = \frac{1}{f'(\underset{f^{-1}(0)}{\underset{\shortparallel}{2}})} = \underline{\underline{\frac{6\sqrt[3]{4}\sqrt{2-\sqrt[3]{2}}}{3\sqrt[3]{4}-1}}}$$

0.7

[2b] 3. Nechť

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right).$$

- Určete maximální možný interval, na kterém je funkce f definována.
- Na tomto intervalu nalezněte primitivní funkci k f.

0.5

- $D_f = \{x \in \mathbb{R};\ x+1 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0 \wedge \underbrace{\sqrt{x+1} > \sqrt{x-1}}_{\text{vždy}}\} = \underline{\langle 1, +\infty)}$

- Integrace per-partes 0.9

$$\int \underset{\substack{\downarrow \text{int.} \\ x}}{1} \cdot \underset{\substack{\downarrow \text{der.} \\ \frac{1}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})} \cdot \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}}}{\ln\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)} = x \ln\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$z = \sqrt{x^2-1}$$

$$dz = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$= x\ln\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right) + \frac{1}{2}\int dz = \underline{\underline{x\ln\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + C}}$$ 0.6

[3b] 4. Na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ určete

$$I(x) := \int |\operatorname{tg} x|^3\,dx.$$

0.5 za rozdělení na $(0, \frac{\pi}{2})$ a $(-\frac{\pi}{2}, 0)$

$\boxed{\text{na } (0, \frac{\pi}{2})}$

0.5

$$I(x)\Big|_{(0,\frac{\pi}{2})} = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}\sin x\,dx \underset{\substack{\cos x = y > 0 \\ -\sin x\,dx = dy}}{=} \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^3}\right)dy =$$

0.5

$$= \ln y + \frac{1}{2y^2} + C\Big|_{y=\cos x} = \underline{\frac{1}{2\cos^2 x} + \ln\cos x}$$ (modulo konstanta)

$\boxed{\text{na } (-\frac{\pi}{2}, 0)}$

0.5

— II —

$$I(x)\Big|_{(-\frac{\pi}{2},0)} = -\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,dx = \underline{-\left(\frac{1}{2\cos^3 x} + \ln\cos x\right)}$$

0.5

Protože $\lim\limits_{x\to 0+} I(x)\Big|_{(0,\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{2}$ a $\lim\limits_{x\to 0-} I(x)\Big|_{(-\frac{\pi}{2},0)} = -\frac{1}{2}$

tak hledaná $I(x)$ má tvar

0.5

$$\underline{\underline{I(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln\cos x + C & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}) \\ 1 - \frac{1}{2\cos^2 x} - \ln\cos x + C & x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \end{cases}}}$$