↑ nahoru

První zápočtový test　　　　　　Jméno a příjmení:

Příklad:	1	2	3	4	5	Celkem
Získané body:						
Maximální počet bodů	2	2	2	2	2	10

[2] 1. **Metodou matematické indukce** dokažte následující trvzení:

Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí: $(x-y)\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} = x^{n+1} - y^{n+1}$.

① DK $\boxed{n=1}$ LS: $(x-y)(y+x) = x^2 - y^2$ PS: $= x^2 - y^2$ ✓

② Předpokládejme, že $V(n)$ platí. Dokažme $V(n+1)$.

LS $V(n+1) = (x-y)\sum_{k=0}^{n+1} x^k y^{n+1-k} = (x-y)\left[\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n+1-k} + x^{n+1}\right]$

$= (x-y)\left[y\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} + x^{n+1}\right] \overset{V(n)}{=} \left[y(x^{n+1}-y^{n+1}) + x^{n+1}(x-y)\right]$

$= x^{n+1}y - y^{n+2} + x^{n+2} - x^{n+1}y = x^{n+2} - y^{n+2} =$ PS $V(n+1)$

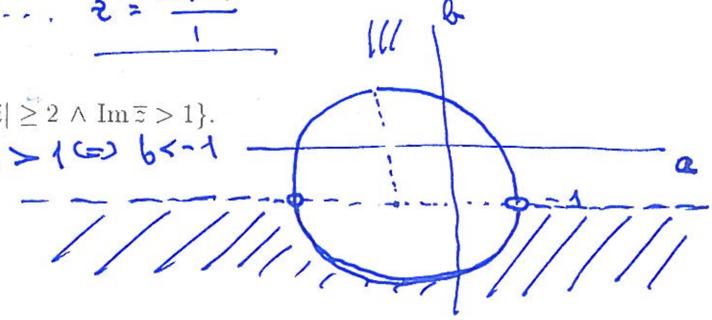
[2b] 2. Nechť $z = \frac{-1}{1+i}$. Určete $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $\bar{z}$, $|z|$ a z^{-1}.

$z = \frac{-1+i}{2}$, $\mathrm{Re}\, z = -\frac{1}{2}$, $\mathrm{Im}\, z = +\frac{1}{2}$, $\bar{z} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$, $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = -1 - i$ .... $z^{-1} = \frac{-1-i}{1}$

Nakreslete množinu $\{z \in \mathbb{C}: |z+1+i| \geq 2 \wedge \mathrm{Im}\, \bar{z} > 1\}$.

$z = (a, b)$ $\bar{z} = (a, -b)$ $-b > 1 \Leftrightarrow b < -1$



[2b] 3. Doplňte tabulku. Uvažujte následující množiny pouze v $\mathbb{R}$, nikoliv v $\mathbb{R}^*$!

M	sup M	inf M	max M	min M
$\{1 - e^{-n};\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$	1	0	neexistuje	0
$\{\cos(x);\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$	1	0	1	neexistuje
$\{\frac{p}{q};\ p, q \in \mathbb{N},\ p+q < 7\}$	5	1/5	5	1/5
$\{n(1+(-1)^n):\ n \in \mathbb{N}\}$	není	0	není	0

	q=1	q=2	q=3	q=4	q=5
p=1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
p=2	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	
p=3	3	$\frac{3}{2}$	1		
p=4	4	$\frac{4}{2}$			
p=5	5				

v $\mathbb{R}^*$ by supremum bylo $+\infty$.

[2b] 4. Buď f zobrazení (od někud někam) a nechť A, B jsou podmnožinami definičního oboru f. Ukažte, že platí $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Buď $\underbrace{y \in f(A \cap B) \text{ lib. pevné}}$. Cíl: ukázat, že $y \in f(A) \cap f(B)$

$\Downarrow$

$(\exists x \in A \cap B)\ f(x) = y \Rightarrow (\exists x \in A)(f(x) = y) \wedge (\exists x \in B)(f(x) = y)$

tj. $x \in f(A) \wedge x \in f(B)$ tedy $x \in f(A) \cap f(B)$

Ukažte, že je-li f prosté zobrazení, pak platí i opačná inkluze, tj.:

$$f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B).$$

Přesně vysvětlete, kde využijete, že f je prosté zobrazení.

Je-li $y \in f(A) \cap f(B)$. Pak $y \in f(A) \wedge y \in f(B)$ tj.

$(\exists x_A \in A)(y = f(x_A)) \wedge (\exists x_B \in B)(y = f(x_B))$

Je-li f prosté, pak $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ nebo $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, což využijeme

Víme totiž, že $f(x_A) = f(x_B)$, odsud $x_A = x_B$ to však znamená, že $\begin{pmatrix} x_A \in A \\ x_B \in B \end{pmatrix}$, že $x := x_A = x_B \in A \cap B$

tedy $y \in f(A \cap B)$. Q.E.D.

[2b] 5. Uvažujte funkci $f(x) = \ln(0.001 + \sin^2 x)$.

i. Určete definiční obor f.

ii. Rozhodněte, zda je funkce f na svém definičním oboru omezená či neomezená.

iii. Rozhodněte, zda je funkce f na svém definičním oboru lichá nebo sudá nebo ani lichá ani sudá.

iv. Rozhodněte, zda je funkce f na svém definičním oboru periodická. Pokud ano, jaká je nejmenší perioda.

(i) $D_f = \mathbb{R}$

(iii) $f(-x) = \ln(0.001 + \sin^2(-x)) = \ln(0.001 + (-1)^2 \sin^2 x)$
$= \ln(0.001 + \sin^2 x) = f(x)$

(iv) $\boxed{\text{ano } T = \pi}$ $f(x + k\pi) = \ln(0.001 + \sin^2(x + k\pi))$
$= \ln(0.001 + \sin^2 x) = f(x)$

Protože

(ii) $0 \le |\sin^2 x| \le 1$ tak $\ln(0.001 + \sin^2(-x)) \in \langle \ln(0.001), \ln(0.001 + 1) \rangle$ což je omezená množina.