Tenzory v $\mathbb{R}^n$: „Z řádkových vektorů vyrobíme zobrazení."

- Lineární forma $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^*$ $\longleftrightarrow$ Maticový součin s řádkovým vektorem zleva

$$\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \longmapsto \alpha_1 x^1 + \dots + \alpha_n x^n$$

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \longmapsto (\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

- Naivní (ale užitečná) interpretace (funguje pro vektory, formy a endomorfismy)
  - Index nahoře = „řádkový" index
  - Index dole = „sloupcový" index

Tenzorový součin s formou:

„Zobrazení, které sežere vektor a pronásobí zbytek výrazu výsledkem působení formy na vektor."

- Tenzorový součin vektoru a formy můžeme chápat jako endomorfismus (přesnější přístup) $\longleftrightarrow$ „Dyadický součin" (tj. maticový v následujícím pořadí) jakožto matice endomorfismu

$$v \otimes \alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$v \otimes \alpha (u) = \underbrace{\alpha(u)}_{\text{číslo}} . v$$

$$A \equiv \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} (\alpha_1 \dots \alpha_n) = \begin{pmatrix} v^1\alpha_1 & \dots & v^1\alpha_n \\ \vdots & & \vdots \\ v^n\alpha_1 & \dots & v^n\alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Pak } A = [v \otimes \alpha]^k_k$$

- Př: Spektrální rozklad

$$A = \lambda_1 P_{v_1} + \dots + \lambda_n P_{v_n}, \text{ kde projektor tvaru } P = v v^T$$

je matice zobrazení: $v \otimes \langle v, \bullet \rangle_{st.}$

- Otázka: Nevystačíme si tedy jen s maticemi a dyadickým součinem?
  - ↳ Předběžná odpověď: NE a tady je první náznak.

- Tenzorový součin dvou forem $\longleftrightarrow$ Dyadický součin a různé transpozice

$$\alpha \otimes \beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

definuje nějakou bilineární formu

$$\alpha \otimes \beta (u, v) = \underbrace{\alpha(u)}_{\text{číslo}} . \underbrace{\beta(v)}_{\text{číslo}}$$

$$\alpha \otimes \beta (u, v) = \left((\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \right) . \left((\beta_1, \dots, \beta_n) \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \right) =$$

$$= (u^1, \dots, u^n) \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} (\beta_1, \dots, \beta_n)}_{\text{Dyadický součin}} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

↳ Finální odpověď: NE, co např. „trilineární formy" $\alpha \otimes \beta \otimes \gamma$?
Tady matice nebudou stačit.

Transformace v $\mathbb{R}^n$

≡ změna báze

- Kanonická báze $\mathbb{R}^n$: $K = (\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right)$

- Duální kanonická báze $(\mathbb{R}^n)^*$: $K^* = (\mathcal{E}^1, \dots, \mathcal{E}^n) \longleftrightarrow ((10\cdots0), \dots, (00\cdots1))$

- Duální báze k $B = (e_1, \dots, e_n)$ je $B^* = (e^1, \dots, e^n)$, že $\boxed{e^i(e_j) \overset{!}{=} \delta^i_j} \equiv \begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}$

- Einsteinova indexová konvence: $\sum_i A_i B^i \equiv A_i B^i$

„dva stejné indexy ve stejném členu jeden nahoře jeden dole"

- Otázka: Jak se transformují duální báze $(\mathbb{R}^n)^*$?

↳ Uvažme změnu báze $\mathbb{R}^n$ danou maticí $R = [id]^K_{B'} = \begin{pmatrix}| & & |\\ e'_1 & \cdots & e'_n\\ | & & |\end{pmatrix}$, $B' \equiv (e'_1, \dots, e'_n)$.

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)\begin{pmatrix}| & & |\\ e'_1 & \cdots & e'_n\\ | & & |\end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{e'_j = \mathcal{E}_i R^i_j}$$

řádkový index; j-tý sloupec R; sloupcový index

řádek plný prvků báze

$$R = [id]^K_{B'}$$

- Lemma 15: Pak je mezi duálními bázemi K^* a B'^* vztah:

$$\begin{pmatrix}e'^1\\\vdots\\e'^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}| & & |\\ e'_1 & \cdots & e'_n\\ | & & |\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\mathcal{E}^1\\\vdots\\\mathcal{E}^n\end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{e'^j = \left(R^{-1}\right)^j_i \mathcal{E}^i}$$

$$R^{-1} = [id]^{B'}_K$$

- Pro souřadnice/reprezentace/složky platí: $\boxed{\begin{aligned} v^i &= R^i_j v'^j\\ \alpha_i &= \alpha'_j \left(R^{-1}\right)^j_i\end{aligned}}$

- Sanity check:

$$\alpha(v) \equiv (-\alpha-)\begin{pmatrix}|\\v\\|\end{pmatrix}$$

$$\alpha(v) = (-\alpha-)\begin{pmatrix}|\\v\\|\end{pmatrix} = (-\alpha'-)\left(R\right)^{-1}\left(R\right)\begin{pmatrix}|\\v'\\|\end{pmatrix} = (-\alpha'-)\begin{pmatrix}|\\v'\\|\end{pmatrix}$$

„Výsledek působení α na v je v každé bázi součin jejich souřadnic."

↳ V indexovém formalismu:

$$\alpha(v) = \alpha_i v^i$$

$$\alpha(v) = \alpha_i v^i = \left(R^{-1}\right)^j_i \alpha'_j R^i_l v'^l = \delta^j_l \alpha'_j v'^l = \alpha'_j v'^j$$

· Otázka: Jak se transformují endomorfismy?

↳ Jednoduchý příklad: $A = v \otimes \alpha = \begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix} (- \alpha -)$

$$A = \begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix} (- \alpha -) = \begin{pmatrix} & R & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ v' \\ | \end{pmatrix} (- \alpha' -) \begin{pmatrix} & R & \end{pmatrix}^{-1} = R A' R^{-1}$$

· Tedy „odvodili" jsme známý vztah: $[A]^{\kappa}_{\kappa} = [\mathrm{id}]^{\kappa}_{\mathcal{B}'} [A]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'} [\mathrm{id}]^{\mathcal{B}'}_{\kappa}$

↳ V indexovém formalismu:

řádkový index

$$\boxed{A^{i}{}_{j} = R^{i}_{k} A'^{k}{}_{\ell} \left(R^{-1}\right)^{\ell}_{j}}$$

sloupcový index

· Otázka: Jak se transformují bilineární formy?

↳ Jednoduchý příklad: $h = \alpha \otimes \beta$, značíme $[\alpha]_{\kappa} = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)$, $[\beta]_{\kappa} = (\beta_1 \cdots \beta_n)$

↳ Pak $[h]_{\kappa}$ má složky: $h_{ij} = \alpha_i \beta_j$

↑ oba indexy dole „sloupcově"

$$h_{ij} = \alpha_i \beta_j = \left(R^{-1}\right)^{k}_{i} \alpha'_{k} \left(R^{-1}\right)^{\ell}_{j} \beta'_{\ell}$$

Tady pomalu přestává dávat smysl pomůcka „horní index – řádkový", „dolní index – sloupcový"

$$\Longrightarrow \quad \boxed{h_{ij} = \left(R^{-1}\right)^{k}_{i} h'_{k\ell} \left(R^{-1}\right)^{\ell}_{j}}$$

↳ Tenhle vztah také odpovídá tomu, co už známe: $h(v, w) = [v]^{\mathcal{B}'} [h]_{\mathcal{B}'} [w]^{\mathcal{B}'}$

$$v^i h_{ij} w^j = \underbrace{v^i \left(R^{-1}\right)^{k}_{i}}_{[\mathrm{id}]^{\mathcal{B}'}_{k} [v]^{k}} h'_{k\ell} \left(R^{-1}\right)^{\ell}_{j} w^j = v'^{k} h'_{k\ell} w'^{\ell}$$

„Ponaučení": Index nahoře/dole odpovídá řádkovému/sloupcovému jen pokud je nahoře/dole maximálně jeden index, v obecném případě se musíme od této analogie oprostit.

Vždy nám ale poloha indexu správně napoví, jakou matici transformace použít. Tedy:

· Za každý dolní index (kovariantní index) jedna matice R

$$T^{1 \cdots}{}_{i \cdots} = R^{j}_{i} \cdots T^{\cdots}{}_{j \cdots}$$

· Za každý horní index (kontravariantní index) jedna matice R^{-1}

$$T^{1\, i \cdots}{}_{\cdots} = \left(R^{-1}\right)^{i}_{j} \cdots T^{j \cdots}{}_{\cdots}$$

Souřadnice kovariantních tenzorů $T_{\dots}$

· Kovariantní tenzor $T \in T_q(V)$

je lineární zobrazení $T : V^q \to \mathbb{F}$

„T sežere q vektorů a vyplivne číslo."

· Souřadnice T vzhledem k $B = (e_1, \dots, e_n)$

$$T_{i\dots j} := T(e_i, \dots, e_j)$$

↳ Pak lze vyjádřit:

$$T = T_{i\dots j}\, e^i \otimes \dots \otimes e^j$$

Tenzorový součin

$$f \otimes g(u,v) \equiv f(u).g(v)$$

Duální báze

$$B^* = (e^1, \dots, e^n)$$

$$e^i(e_j) = \delta^i_j$$

· Př (Zákl 1) $K = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \equiv \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$, $B' = (e'_1, e'_2) \equiv \left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)$, $\alpha = \varepsilon^1 - 2\varepsilon^2$

(1) ↳ $\ker \alpha = ?$

$$0 \overset{!}{=} \alpha(v) \equiv [\varepsilon^1 - 2\varepsilon^2](v) \equiv \varepsilon^1(v) - 2\varepsilon^2(v) \equiv$$

$$\equiv \varepsilon^1(v^1\varepsilon_1 + v^2\varepsilon_2) - 2\varepsilon^2(v^1\varepsilon_1 + v^2\varepsilon_2) =$$

$$= v^1 \underbrace{\varepsilon^1(\varepsilon_1)}_{1} + v^2 \underbrace{\varepsilon^1(\varepsilon_2)}_{0} - 2v^1 \underbrace{\varepsilon^2(\varepsilon_1)}_{0} - 2v^2 \underbrace{\varepsilon^2(\varepsilon_2)}_{1} =$$

$$= v^1 - 2v^2 \quad \Leftrightarrow \quad v^1 \overset{!}{=} 2v^2 \quad \Rightarrow \quad \ker \alpha = \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

↳ Jak jsme čekali: $\ker \alpha = \ker(-\alpha-) = \ker(1, -2) = \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

↳ $\mathrm{Im}\, \alpha = ?$ Víme $\alpha(v) = v^1 - 2v^2 \Rightarrow \mathrm{Im}\, \alpha = \mathbb{R}$

↳ $[\alpha]_K = ?$ Podle definice:

$$\alpha_1 \equiv \alpha(\varepsilon_1) = \underbrace{\varepsilon^1(\varepsilon_1)}_{1} - 2v^1 \underbrace{\varepsilon^2(\varepsilon_1)}_{0} = 1$$

$$\alpha_2 \equiv \alpha(\varepsilon_1) = \underbrace{\varepsilon^1(\varepsilon_2)}_{0} - 2v^1 \underbrace{\varepsilon^2(\varepsilon_2)}_{1} = -2$$

$\Rightarrow [\alpha]_K = (1, -2)$ jak jsme očekávali.

↳ $[\alpha]_{B'} = ?$ Podle definice:

$$\alpha'_1 \equiv \alpha(e_1) = \varepsilon^1(e_1) - 2\varepsilon^2(e_1) =$$

$$= \varepsilon^1(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2) - 2\varepsilon^2(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2) =$$

$$= \varepsilon^1(\varepsilon_1) - 2.2\varepsilon^2(\varepsilon_2) = 1 - 4 = -3$$

$$\alpha'_2 \equiv \alpha(e_2) = \varepsilon^1(\varepsilon_1) - 2.3\varepsilon^2(\varepsilon_2) = -5$$

Zde značíme:

$$T'_{a\dots b} \equiv T(e'_a, \dots, e'_b)$$

$\Rightarrow [\alpha]_{B'} = (-3, -5)$

· Př (Zákl 2) $K = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \equiv \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$, $\alpha = \varepsilon^1 - 2\varepsilon^2$, $\beta = \varepsilon^2$

(2) $g = \alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha$

↳ $[g]_K$ Podle definice: $g_{11} \equiv g(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = \alpha(\varepsilon_1)\overset{\circ}{\beta(\varepsilon_1)} + \overset{\circ}{\beta(\varepsilon_1)}\alpha(\varepsilon_1) = 0$

$g_{12} \equiv g(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \alpha(\varepsilon_1)\overset{1}{\beta(\varepsilon_2)} + \overset{\circ}{\beta(\varepsilon_1)}\alpha(\varepsilon_2) =$

$= \alpha(\varepsilon_1) \equiv \alpha_1 = 1$

$g_{21} \equiv g(\varepsilon_2, \varepsilon_1) = \dots = 1$ $\Rightarrow [g]_K = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -4\end{pmatrix}$

$g_{22} \equiv g(\varepsilon_2, \varepsilon_2) = \dots = -4$

(3) $T := g \otimes \beta = \alpha \otimes \beta \otimes \beta + \beta \otimes \alpha \otimes \beta$

↳ $[T]_K$ Podle definice: $T_{111} \equiv T(\varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon_1) = \dots$

$T_{112} \equiv T(\varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \dots$

↳ Jednodušší bude využít:

· Užitečná vlastnost: $\boxed{T = \alpha \otimes \beta \otimes \dots \otimes \gamma \Rightarrow T_{ij\dots k} = \alpha_i \beta_j \dots \gamma_k}$

↳ Můžeme mluvit o tenzorovém součinu vektorů, takto budeme určovat jeho souřadnice. Jak takový součin chápat jako skutečný tenzorový součin zobrazení zjistíme příště.

· Př (Zákl 2, pokračování)

(3) Jinak: $T_{ijk} = g_{ij}\beta_k = g_{ij}\delta^2_k$

· Př (Zákl 3) $u = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

↳ Souřadnice "bivektoru" $X = u \otimes v$ vůči K?

$X^{ij} = u^i v^j$ $\quad u^1 = 1 \quad v^1 = 1$ $\quad u^2 = 1 \quad v^2 = -2$ $\Rightarrow$ $X^{11} = 1 \quad X^{12} = -2$ $\quad X^{21} = 1 \quad X^{22} = -2$

Transformace souřadnic tenzorů

- Za každý **dolní index** (**kovariantní index**) jedna matice $R \equiv [id]_{B}^{B'}$

$$T^{1\cdots}{}_{i\cdots} = R^{j}_{i} \cdots T^{\cdots}{}_{j\cdots}$$

- Za každý **horní index** (**kontravariantní index**) jedna matice $R^{-1} \equiv [id]_{B'}^{B}$

$$T^{1\,i\cdots}{}_{\cdots} = \left(R^{-1}\right)^{i}_{j} \cdots T^{j\cdots}{}_{\cdots}$$

- Př (Zákl 1, pokračování) $K = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \equiv \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$, $B' = (e'_1, e'_2) \equiv \left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)$

(3) Ověříme transformační vztah.

$[\alpha]_K = (1,-2)$, $R = [id]_{B'}^{K} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

$\alpha'_j = R^i_j \alpha_i \Rightarrow$ (Einsteinovo sumační pravidlo)

$\alpha'_1 = R^1_1 \alpha_1 + R^2_1 \alpha_2 = 1.1 + 2.(-2) = -3$

$\alpha'_2 = R^1_2 \alpha_1 + R^2_2 \alpha_2 = 1.1 + 3.(-2) = -5$

$\Rightarrow [\alpha]_{B'} = (-3,-5)$ stejně jako přímo z definice.

↳ V tomto případě lze také chápat maticově: $(-3,-5) = (1,-2)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

- Př (Zákl 2, pokračování)

$[g]_B = ?$

$[g]_K = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -4\end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

$g'_{kl} = R^i_k R^j_l g_{ij}$

(maticově násobení zleva, tedy v tomto případě musíme chápat index i matice R jako sloupcový, tzn. transponovat ji; maticově násobení zprava, zde indexy odpovídají naivní interpretaci)

↳ lze přepsat maticově: $[g]_B = \underbrace{R^T [g]_K R}_{\text{opět známý vztah}} = \cdots = \begin{pmatrix}-12 & -19\\ -19 & -30\end{pmatrix}$

- Přímý výpočet – trochu otravně:

$$g'_{11} = R^i_1 R^j_1 g_{ij} = R^1_1 R^1_1 g_{11} + R^1_1 R^2_1 g_{12} + R^2_1 R^1_1 g_{21} + R^2_1 R^2_1 g_{22} =$$
$$= 1.1.0 + 1.2.1 + 2.1.1 + 2.2.(-4) =$$
$$= -12, \text{ ostatní souřadnice obdobně.}$$

- Př (Zákl 3, pokračování) Souřadnice "bivektoru" $X = u \otimes v$ vůči B'?

$[X]_K = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

$$X'^{kl} = \left(R^{-1}\right)^{k}_{i} \left(R^{-1}\right)^{l}_{j} X^{ij}$$

↳ Analogicky jako v případě **bilineární formy**, tentokrát jen s inverzní $R^{-1} = \begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

$$[X]_{B'} = \left(R^{-1}\right)^T [X]_K \left(R^{-1}\right) = \cdots = \begin{pmatrix}10 & -8\\ -5 & 4\end{pmatrix}$$