Vektory jako zobrazení

- forma $\alpha \in V^*$ sežere vektor: $v \longmapsto \alpha(v)$

$$= (-\alpha-)\begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix}$$

- vektor $v \in V$ sežere formu: $\alpha \longmapsto \alpha(v)$

$$= (V^*)^*$$

kontrahujeme ("nechāme navzājem se sežrat") vektor s formou

Př: $v \otimes \alpha \in T^1_1(V)$ je tenzor, který sežere jednu formu β a jeden vektor w.

$$v \otimes \alpha(\beta, w) \equiv \beta(v) \cdot \alpha(w)$$

Endomorfismus na V uděláme z $v \otimes \alpha$ tak, že budeme dosazovat jen do druhého argumentu.

$$v \otimes \alpha(w) := v \otimes \alpha(-, w) \equiv v \cdot \alpha(w)$$

Endomorfismus na V^* uděláme z $v \otimes \alpha$ tak, že budeme dosazovat jen do prvního argumentu.

$$v \otimes \alpha(\beta) := v \otimes \alpha(\beta, -) \equiv v(\beta) \cdot \alpha$$

Souřadnice kontravariantních tenzorů $T^{\cdots}$

- Kontravariantní tenzor $T \in T^p_0(V)$ je lineární zobrazení $T : (V^*)^p \to \mathbb{F}$

"T sežere p forem a vyplivne číslo."

- Souřadnice T vzhledem k $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$

$$T^{i \dots j} := T(e^i, \dots, e^j)$$

↳ Pak lze vyjádřit:

$$T = T^{i \dots j} e_i \otimes \cdots \otimes e_j$$

Duální báze

$$\mathcal{B}^* = (e^1, \dots, e^n)$$

$$e^i(e_j) = \delta^i_j$$

Souřadnice smíšených tenzorů $T^{\cdots}_{\cdots}$

· Tenzor $T \in T^p_q(V)$ je lineární zobrazení $T : (V^*)^p \times V^q \to \mathbb{F}$

„T sežere p forem a q vektorů a vyplivne číslo."

· Souřadnice T vzhledem k $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$

$$T^{i\dots j}_{k\dots l} := T(e^i, \dots, e^j, e_k, \dots, e_l)$$

↳ Pak lze vyjádřit:

$$T = T^{i\dots j}_{k\dots l}\, e_i \otimes \dots \otimes e_j \otimes e^k \otimes \dots \otimes e^l$$

(p vektorů, q kovektorů)

· Tenzor je symetrický v prvním a druhém argumentu pokud

$$\forall A,B: \quad T(A,B,\dots) = T(B,A,\dots) \quad \text{neboli} \quad T_{ij\dots} = T_{ji\dots} \ \text{(v lib. souř.)}$$

· Tenzor je antisymetrický v prvním a druhém argumentu pokud

$$\forall A,B: \quad T(A,B,\dots) = -T(B,A,\dots) \quad \text{neboli} \quad T_{ij\dots} = -T_{ji\dots} \ \text{(v lib. souř.)}$$

Obdobně v i-tém a j-tém argumentu (jen musí být oba indexy nahoře nebo oba dole).

Je úplně (anti)symetrický, pokud je (anti)sym. ve všech indexech.

· Př (Zákl 1) Pro daný $a \in \mathbb{R}^2$ definujeme $A \in T^2_1(\mathbb{R}^2)$.

$$A(\phi, \psi, u) := \phi(a).\psi(u) - \phi(u).\psi(a)$$

(1) Souřadnice A vzhledem ke kanonické bázi $K = (e_1, e_2) \equiv \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$

$$A^{ij}_{\ k} \equiv A(e^i, e^j, e_k) \equiv \underbrace{a(e^i)}_{a^i}.\underbrace{e^j(e_k)}_{\delta^j_k} - e^i(e_k).e^j(a) = a^i\delta^j_k - \delta^i_k a^j$$

$$A^{ji}_{\ k} = a^j\delta^i_k - \delta^j_k a^i = -a^i\delta^j_k + \delta^i_k a^j = -A^{ij}_{\ k} \Rightarrow \text{antisym. v prvním a druhém indexu.}$$

konkrétně např.:

$$A^{12}_{\ 1} = a^1\underbrace{\delta^2_1}_{0} - \underbrace{\delta^1_1}_{1}a^2 = -a^1$$

$$A^{21}_{\ 1} = a^2\underbrace{\delta^1_1}_{1} - \underbrace{\delta^2_1}_{0}a^1 = a^1$$

· **Levi-Civitův symbol** $\tilde{\varepsilon}_{ijk} = \begin{cases} 1 & , \operatorname{sign}\begin{pmatrix}1&2&3\\i&j&k\end{pmatrix} = +1 \\ -1 & , \operatorname{sign}\begin{pmatrix}1&2&3\\i&j&k\end{pmatrix} = -1 \\ 0 & , \text{nějaké indexy jsou stejné} \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $\tilde{\varepsilon}_{ijk}$ je úplně antisymetrický se složkou $\tilde{\varepsilon}_{123} = 1$.

vymyslíš důkaz?

· Př (Zákl 2) „Determinant působící na sloupce matice," tedy orientovaný objem rovnoběžnostěnu.

$$\mathrm{Det}(u,v,w) := \det\begin{pmatrix} | & | & | \\ u & v & w \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

↳ Je to lin. zobrazení, tedy tenzor $\in T^0_3(\mathbb{R}^3)$

↳ Je úplně antisymetrický.

↳ V kanonické bázi: $\mathrm{Det}_{123} \equiv \mathrm{Det}(e_1,e_2,e_3) \equiv \det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = 1$

$$\Rightarrow \mathrm{Det}_{ijk} = \tilde{\varepsilon}_{ijk}, \text{ tedy } \mathrm{Det} = \tilde{\varepsilon}_{ijk}\, e^i \otimes e^j \otimes e^k$$

(dual. kanonická báze)

· Pozn: Vektorový součin v $\mathbb{R}^3$ lze zapsat v kanonické bázi jako:

$$(v \times w)_i = \tilde{\varepsilon}_{ijk}\, v^j w^k$$

· **(Anti)symetrizace**

↳ Tenzor se všemi indexy jen nahoře nebo jen dole můžeme "minimálním způsobem" změnit na úplně (anti)symetrický.

· Tenzor se dvěma indexy:

symetrizace: $\left(\pi_S T\right)^{ij} \equiv T^{(ij)} \equiv \frac{1}{2}\left(T^{ij} + T^{ji}\right)$

↳ např: $\pi_S(v \otimes w) \equiv \frac{1}{2}(v\otimes w + w \otimes v)$

antisymetrizace: $\left(\pi_A T\right)^{ij} \equiv T^{[ij]} \equiv \frac{1}{2}\left(T^{ij} - T^{ji}\right)$

↳ např: $\pi_A(v \otimes w) \equiv \frac{1}{2}(\underset{12}{v\otimes w} - \underset{21}{w\otimes v})$

· Tenzor se třemi indexy:

symetrizace: $T^{(ijk)} \equiv \frac{1}{6}\left(T^{ijk} + T^{kij} + T^{jki} + T^{jik} + T^{kji} + T^{ikj}\right)$

antisymetrizace: $T^{[ijk]} \equiv \frac{1}{6}\left(\underset{123}{T^{ijk}} + \underset{312}{T^{kij}} + \underset{231}{T^{jki}} - \underset{213}{T^{jik}} - \underset{321}{T^{kji}} - \underset{132}{T^{ikj}}\right)$

· Př (Zákl 9) Mějme $B = (e_1, e_2)$, bázi $\mathbb{R}^2$, $\alpha, \beta \in (\mathbb{R}^2)^*$.

Dokaž: $\pi_A(\alpha \otimes \beta) = \det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix} \pi_A(e^1 \otimes e^2)$

↳ $\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2$, $\pi_A(e^1\otimes e^2) = \frac{1}{2}(e^1\otimes e^2 - e^2 \otimes e^1)$

↳ $\pi_A(\alpha\otimes\beta) = \frac{1}{2}(\alpha\otimes\beta - \beta\otimes\alpha) = \frac{1}{2}\left((\alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2)\otimes(\beta_1 e^1 + \beta_2 e^2) - (\beta_1 e^1 + \beta_2 e^2)\otimes(\alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2)\right) =$

$$= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\alpha_1\beta_1 e^1\otimes e^1} + \alpha_1 e^1 \otimes \beta_2 e^2 + \alpha_2 e^2 \otimes \beta_1 e^1 + \underbrace{\alpha_2 e^2 \otimes \beta_2 e^2} - \underbrace{\beta_1\alpha_1 e^1\otimes e^1} - \beta_1 e^1 \otimes \alpha_2 e^2 - \beta_2 e^2 \otimes \alpha_1 e^1 - \underbrace{\beta_2 e^2 \otimes \alpha_2 e^2}\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\alpha_1\beta_2 e^1\otimes e^2 + \alpha_2\beta_1 e^2\otimes e^1 - \beta_1\alpha_2 e^1\otimes e^2 - \beta_2\alpha_1 e^2\otimes e^1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\alpha_1\beta_2(e^1\otimes e^2 - e^2\otimes e^1) - \beta_1\alpha_2(e^1\otimes e^2 - e^2\otimes e^1)\right)$$

$$= (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)\,\pi_A(e^1\otimes e^2)$$

• **Kontrakce**: Mějme lib. bázi $(e_1, \dots, e_n)$ a duální $(e^1, \dots, e^n)$.

$$C_{ab}(T) := T(-, \dots, e^i, \dots, -, \dots, e_i, \dots, -)$$

(a-tý kontravariantní, b-tý kovariantní)

• V souřadnicovém zápisu je to mnohem srozumitelnější:

• Kontrakce vektoru a formy

$$\alpha_i v^j \rightsquigarrow \alpha_i v^i = \alpha(v) = v(\alpha) \quad \| \quad C_{11}(\alpha \otimes v)$$

• Stopa matice (endomorfismu)

$$A^i_j \rightsquigarrow \mathrm{Tr}\, A = A^i_i \quad \| \quad C_{11}(A)$$

• Maticové násobení

$$A^j_k x^i \rightsquigarrow A^j_i x^i = [A \cdot x]^j \quad \| \quad [C_{21}(A \otimes x)]^j$$

• Kontrakce "vyššího" tenzoru

$$R^\mu{}_{\nu\sigma\lambda} \rightsquigarrow R^\mu{}_{\nu\mu\lambda} \equiv \mathrm{Ric}_{\nu\lambda} \quad \| \quad [C_{12}(R)]_{\nu\lambda}$$

• Př (Zákl 1) $A^{ij}{}_k = a^i \delta^j_k - \delta^i_k a^j$

(2) $C_{21}(A) = ?$ $\quad A^{ij}{}_j = a^i \underbrace{\delta^j_j}_{\| \delta^1_1 + \delta^2_2 = \dim V = 2} - \delta^i_j a^j = 2a^i - a^i = a^i$

$$\Rightarrow C_{21}(A) = a \in \mathbb{R}^2 \equiv T^1_0(\mathbb{R}^2)$$

$A \in T^2_1(\mathbb{R}^2)$

• Důležitá vlastnost: Kontrakce přes dvojici symetrických a antisymetrických indexů dává nulu (nulový tenzor).

Důkaz: $A^{ij} B_{ij} = -A^{ji} B_{ij} = -A^{ji} B_{ji} = -A^{ij} B_{ij}$

($ij \leftrightarrow ji$; přeznač $i \leftrightarrow j$)

$\Rightarrow$ antisymetrické matice mají nulovou stopu

$$\mathrm{Tr}\, A = A^i{}_i = A_{ji} \delta^{ji} = 0$$

· Zdvihání a snižování indexu

(pomocí nedegenerované symetrické bilineární formy „metrický tenzor" $g = g_{ij}\, e^i \otimes e^j$)

↳ Souřadnice vektoru $\longmapsto$ Souřadnice formy

$$v^i \xrightarrow[\text{snížení indexu}]{} g_{ij} v^j$$

↳ Souřadnice formy $\longmapsto$ Souřadnice vektoru

$$\alpha_i \xrightarrow[\text{zvýšení indexu}]{} g^{ij} \alpha_j$$

↳ Inverze g_{ij}: $g_{ij} g^{jk} \overset{!}{=} \delta_i^k$

↳ Souřadnice tenzoru $\in T^1_2(V)$

$$T^i_{jk} \xrightarrow[\text{snížení 1. indexu}]{} g_{il} T^l_{jk} \longleftrightarrow \ldots \in T^0_3(V)$$

$$T^i_{jk} \xrightarrow[\text{zvýšení 2. indexu}]{} g^{jl} T^i_{lk} \longleftrightarrow \ldots \in T^2_1(V)$$

$$T^i_{jk} \xrightarrow[\text{zvýšení 3. indexu}]{} g^{kl} T^i_{jl} \longleftrightarrow \ldots \in T^2_1(V)$$

„Abstraktně" můžeme takové snížení/zvýšení n-tého indexu zapsat jako:

$$T(\ldots, \ldots, \ldots) \xrightarrow[\text{snížení}]{} T(\ldots, \underbrace{b__}_{n\text{-tý}}, \ldots), \text{ kde } bv = g(-, v)$$

↳ pak: $T(e^i, \ldots, (be_j), \ldots, e^k) = g_{jl} T^{i \ldots l \ldots k}$

$$T(\ldots, \ldots, \ldots) \xrightarrow[\text{zvýšení}]{} T(\ldots, \underbrace{\#__}_{n\text{-tý}}, \ldots), \text{ kde } \#\alpha = g^{-1}(-, \alpha)$$

↳ pak: $T(e_i, \ldots, (\#e^j), \ldots, e_k) = g^{jl} T_{i \ldots l \ldots k}$

· Př (Zákl 1)

$$A^{ij}{}_k = a^i \delta^j_k - \delta^i_k a^j$$

(3) Souřadnice $\tilde{A} := A(-, -, \#-)$ vzhledem ke kanonické bázi $K = (e_1, e_2)$, zdvih pomocí $g = \langle , \rangle_{st}$, tedy $[g]_K = E$ a $[g^{-1}]_K = E$, tedy $g_{ij} = \delta_{ij}$ a $g^{ij} = \delta^{ij}$.

$$\tilde{A}^{ijk} = g^{kl} A^{ij}{}_l = \delta^{kl} A^{ij}{}_l = \delta^{kl} a^i \delta^j_l - \delta^{kl} \delta^i_l a^j = \delta^{kj} a^i - \delta^{ki} a^j$$

Je úplně antisymetrický?

↳ Ne, např.: $\tilde{A}^{ikj} = \delta^{jk} a^i - \delta^{ji} a^k \neq \tilde{A}^{ijk}$.

· Pozn: Vektorový součin v $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem můžeme chápat jako $(v \times w)_i = \tilde{\varepsilon}_{ijk} v^j w^k$, kde výsledku zvýšíme index pomocí $g^{ij}_{st.} = \delta^{ij}$, tedy $(v \times w)^i = \delta^{il} \tilde{\varepsilon}_{ljk} v^j w^k$.

Díky tomu, že δ^{ij} žádné souřadnice nezmění, v $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem „nemusíme rozlišovat" mezi horními a dolními indexy souřadnic vzhledem ke kanonické bázi.

P$_{\text{v}}$ (Zákl 8)

• (pseudo) metrický tenzor: $\eta_{\mu\nu}$ s maticí $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ vůči kanonické bázi v $\mathbb{R}^4$ = "plochý prostoročas"

$\Rightarrow$ inverzní: $\eta^{\mu\nu}$ má matici $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

• EM tenzor: $F^{\mu}{}_{\nu}$ definujeme maticí $\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$, kde chápeme horní index endomorfismu jako řádkový, dolní jako sloupcový.

↳ snížení indexu: $F_{\varrho\nu} \equiv \eta_{\varrho\mu} F^{\mu}{}_{\nu}$ má matici

kontrakce přes řádkový index F, tedy násobení maticí η zleva

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

(pokud první index ϱ interpretujeme jako řádkový, druhý ν jako sloupcový)

↳ zvýšení indexu: $F^{\mu\sigma} \equiv \eta^{\nu\sigma} F^{\mu}{}_{\nu}$ má matici

kontrakce přes sloupcový index F, tedy násobení maticí η zprava

$$\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

(pokud první index μ interpretujeme jako řádkový, druhý σ jako sloupcový)

• K výpočtu $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ nejdříve spočteme částečnou kontrakci $F_{\mu\nu}F^{\mu\sigma}$.

kontrakce přes dva řádkové indexy nedává v jazyku matic smysl, musíme jednu z matic transponovat

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\sigma} \overset{\text{antisymetrie}}{=} -F_{\nu\mu}F^{\mu\sigma}$$ odpovídá maticovému součinu:

$$-\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \vec{E}^2 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & E_x^2 - B_z^2 - B_y^2 & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & E_y^2 - B_z^2 - B_x^2 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & E_z^2 - B_y^2 - B_x^2 \end{pmatrix}$$

↳ Z výsledné matice stačí vzít stopu $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}F^{\mu\nu}$.

nediagonální členy nebudeme potřebovat

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \mathrm{Tr}\left[-\begin{pmatrix} \vec{E}^2 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & E_x^2 - B_z^2 - B_y^2 & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & E_y^2 - B_z^2 - B_x^2 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & E_z^2 - B_y^2 - B_x^2 \end{pmatrix} \right] = 2\vec{B}^2 - 2\vec{E}^2$$

Pozn: Ve „správném" EM tenzoru se $\vec{E}$ objevuje dělené rychlostí světla c. Podobně časová („nultá") souřadnice polohového vektoru se škáluje rychlostí světla: x^{μ} odpovídá souřadnicím (ct, x, y, z). Invariant $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ má „ve skutečnosti" hodnotu $2\vec{B}^2 - \frac{2}{c}\vec{E}^2$. Jde samozřejmě jen o volbu fyzikálních jednotek.

Maxwellovy rovnice

$$\partial_{[\varrho} F_{\mu\nu]} = 0$$

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = J^{\nu}$$

parciální derivace podle souřadnice x^{μ} se transformuje

4-proud obsahuje „zdroje"