- <u>Afinní prostor</u> A_n se „zaměřením" V_n (tj. s „prostorem směrů" V_n):

  - bod: $$\underset{\overset{\cap}{A_n}}{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

  - vektor: $$\underset{\overset{\cap}{V_n}}{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

  - rozdíl bodů: $$a - b :\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 - b_1 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}$$

  - posun bodu o vektor: $$a + r :\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 + r_1 \\ \vdots \\ a_n + r_n \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 + r_1 \\ \vdots \\ a_n + r_n \end{bmatrix}$$

- <u>Afinní zobrazení</u> $f_{A,r} : A_n \longrightarrow A_n$

$$f_{A,r}(a) := \underbrace{A}_{\overset{\cap}{\mathbb{R}^{n\times n}}} a + \underset{\overset{\cap}{V_n}}{r} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline r & A \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{array}\right) \equiv \tilde{A}\,\tilde{a}$$

- <u>Soustava souřadnic</u>

$$S = \Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}}_{\substack{\text{počátek} \\ p}}, \underbrace{b_1, \dots, b_n}_{\substack{\text{báze } B \\ \text{prostoru } V_n}}\Bigg) \quad \& \quad [a]^S := [a - p]^B$$

- <u>Př</u> (Zah 1)

$$S = \Bigg(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \overbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}^{B}\Bigg), \quad S' = \Bigg(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}^{B'}\Bigg)$$

a)

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a - p = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [a]^S = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

b) Označme:

$$[a]^S \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$[a]^{S'} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{pmatrix}$$

→ Jak musí vypadat vztah mezi různými souř. soustavami?

$$a = a$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_1'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2'\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + [id]^K_B \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + [id]^K_{B'} \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{pmatrix}$$

$$[id]^K_B \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + [id]^K_{B'} \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right]^B + [id]^B_{B'} \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{pmatrix}$$

· Kvadrika je nulová množina kvadratické formy $Q_{\tilde{A}}$ pro

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} c & b^T \\ \hline b & A \end{array}\right),$$

tedy řešení $\tilde{x}$ rovnice: $\tilde{x}^T \tilde{A} \tilde{x} = 0$.

↪ je regulární, pokud je $\tilde{A}$ regulární

↪ je středová, pokud je A regulární

↪ střed má stejné souřadnice jako vektor $\boxed{-A^{-1}b}$

↪ je v kanonickém tvaru pokud A je diagonální

↪ pak označíme $A = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$, c_d značíme element $\tilde{A}$ na pozici 11 v takové soustavě souřadnic

Pro středovou kvadriku: $\boxed{c_d = c - b^T A^{-1} b}$

· Věta 37 Regulární středová kvadrika se signaturou A rovnou $(p, q, 0)$ je:

- hyperboloid, pokud $q \neq 0$ & $p \neq 0$
- elipsoid, pokud $\begin{cases} q = 0 \ \& \ \frac{\det \tilde{A}}{\det A} < 0 \\ \text{nebo} \\ p = 0 \ \& \ \frac{\det \tilde{A}}{\det A} > 0 \end{cases}$
- prázdná množina, pokud $\begin{cases} q = 0 \ \& \ \frac{\det \tilde{A}}{\det A} > 0 \\ \text{nebo} \\ p = 0 \ \& \ \frac{\det \tilde{A}}{\det A} < 0 \end{cases}$

se směry poloos danými vl. vektory matice A a délkou i-té poloosy: $\boxed{\sqrt{-\frac{c_d}{d_i}}}$

· Pozn: Hyperboloid v $\mathbb{R}^3$ je $\begin{Bmatrix} \text{jednodílný} \\ \text{dvoudílný} \end{Bmatrix}$, pokud lze zapsat ve tvaru $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \end{cases}$

· Tvrzení: Regulární nestředová kvadrika je:

- paraboloid se směrem osy daným vl. vektorem A příslušným vl. číslu 0 a s vrcholem v počátku souřadnic, které převádí $\tilde{A}$ do kanonického tvaru.

· Pozn: Paraboloid v $\mathbb{R}^3$ je $\begin{Bmatrix} \text{eliptický} \\ \text{hyperbolický} \end{Bmatrix}$, pokud lze zapsat ve tvaru $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0 \end{cases}$

· Př (Zah 2)

↳ Dokaž, že $3x^2+2xy+3y^2-10x-14y+7=0$ je elipsa, urči střed, směry a délky poloos.

$$3x^2+2xy+3y^2-10x-14y+7=(1\ x\ y)\overbrace{\begin{pmatrix} 7 & -5 & -7 \\ -5 & 3 & 1 \\ -7 & 1 & 3 \end{pmatrix}}^{\tilde{A}}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$$

· $\det \tilde{A} = -96$

· $\det A = 8 \Rightarrow$ Sylvester pro $(1,3,8)$ dává $q=0 \Rightarrow$ signatura $\underbrace{(2,0,0)}$.

$\Rightarrow \dfrac{\det\tilde{A}}{\det A} = \dfrac{-96}{8} < 0 \Big\} \longrightarrow$ V37 $\Rightarrow$ jde o elipsu.

· střed: $-A^{-1}b = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

· vl. čísla A: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$, vl. vektory A: např. $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}^{\text{směry poloos}}$.

· $c_d = c + b^T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 7 + (-5\ -7)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = -12$

$\Rightarrow$ délky poloos: $\sqrt{\frac{12}{2}} = \sqrt{6}$, $\sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$

· Hint (Zákl 5)

· Afinní transformace (AT) tvoří grupu, pokud:

- složení AT je AT (asociativita je zřejmá)
- $\exists$ neutrální AT
- ke každé AT $\exists$ inverzní AT