· Kvadratická forma Q_g příslušící bilineární formě g:

$$\boxed{Q_g(v) := g(v,v)}$$

$$[Q_g(v)]^B = \left([v]^B\right)^T [g]_B [v]^B$$

$$(-v-)\left(\ g\ \right)\begin{pmatrix}|\\v\\|\end{pmatrix}$$

Př: Kinetická energie T pro bodovou částici s hmotností m:

$$T(v) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = (v_x\ v_y\ v_z)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}m & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}m & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{pmatrix}$$

$$T = Q_g\,,\quad g = \frac{1}{2} m E$$

· Rozklad matice na symetrickou a antisymetrickou část:

$$M = M_S + M_A\,,\ \text{kde}\ \begin{cases} M_S = \frac{1}{2}\left(M + M^T\right), & \text{platí } M_S = M_S^T \\ M_A = \frac{1}{2}\left(M - M^T\right), & \text{platí } M_A = -M_A^T \end{cases}$$

· Tvrzení 58: $\boxed{Q_g = Q_{g_S}}$

⇝ Matice Q_g vůči $B := [g_S]_B$ je definována jednoznačně.

· Pozn: Polární báze Q_g (tj. polární báze g) není určena jednoznačně, dokonce ani diagonální členy matice vůči polární bázi. Jednoznačně daná ale je:

· Signatura Q_g (p,q,n) je počet kladných (p), záporných (q) a nulových (n) prvků na diagonále matice Q_g reprezentované vůči lib. polární bázi.

· Věta (Sylvesterovo kritérium) Pro $[g]_B = G$ pokud $\det G_i \neq 0$ pro $\forall i$:

$$q = \boxed{\begin{array}{l}\text{počet znaménkových změn v posloupnosti}\\ \left(1, \det G_1, \det G_2, \dots, \det G_m\right)\end{array}}$$

↳ Tedy signatura je $(m-q, q, 0)$.

· Pozn: Polární bázi lze pro skalární součin g najít jak pomocí symetrických úprav, tak s využitím OG diagonalizace.

· Př (Zah 1) $g(x,y) = 3x_1y_1 + 6x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$

(a) Rozlož na sym/antisym část

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow G_S = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$G_A = G - G_S = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [Q_g]_K^K = G_S = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Q_g(x) = 3x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2$$

(b) Najdi polární bázi G_S pomocí symetrických úprav a pomocí OG diagonalizace.

· Symetrické úpravy:

$$\left(\begin{matrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right) \overset{ř}{\sim} \left(\begin{matrix} 3 & 4 \\ 0 & -7/3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 \\ -4/3 & 1 \end{matrix}\right) \overset{s}{\sim} \left(\begin{matrix} 3 & 0 \\ 0 & -7/3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 \\ -4/3 & 1 \end{matrix}\right) \Rightarrow B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4/3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$ polární báze

· OG diagonalizace

$$0 \overset{!}{=} \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2 - 16 = \lambda^2 - 6\lambda - 7 = (\lambda-7)(\lambda+1) \Rightarrow \lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = -1$$

$$V_7 = \ker\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{-1} = \ker\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

zřejmě kolmé

$\Rightarrow$ ON báze $C = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

($\Rightarrow$ polární)

(c) Urči signaturu pomocí (b) a pomocí Sylvesterova kritéria.

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7/3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (1,1,0)$ $\qquad$ $\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = -1 \rightsquigarrow (1,1,0)$

· Sylvester:

$G_1 = (3)$, $\det G_1 = 3$

$G_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\det G_2 = -7$

$\Rightarrow$ V posloupnosti $(1, 3, -7)$

$\Rightarrow q = 1$, $p = 2 - 1 = 1$

$\Rightarrow$ Signatura je $(1,1,0)$.

· Nulová množina Q_g je: $\qquad N_g := \{v : Q_g(v) = 0\}$

(„jádro")

↪ Nemusí jít o lineární podprostor!

· Př (Zah 1) $\quad G_S = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $[G_S]_B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$7v_1^2 = v_2^2$

(d) N_g vůči polární a kanonické bázi.

$$(v_1\ v_2)\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 7v_1^2 - 1v_2^2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow [N_g]^B = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{7} \end{pmatrix} \right\rangle \cup \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{7} \end{pmatrix} \right\rangle$$

↪ vůči kanonické bázi: $[v]^K = [id]_B^K [v]^B$, kde $[id]_B^K = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$N_g \equiv [N_g]^K = \left\langle \begin{pmatrix} 1+\sqrt{7} \\ 1-\sqrt{7} \end{pmatrix} \right\rangle \cup \left\langle \begin{pmatrix} 1-\sqrt{7} \\ 1+\sqrt{7} \end{pmatrix} \right\rangle$$

· Hint (Zákl 2) Předpokládejme, že jsme nalezli polární bázi B, vůči které:

$$[Q_g]_B = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow [N_g]_B = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v_1^2 - v_2^2 - 2v_3^2 = 0\}$$

$$v_1^2 = v_2^2 + 2v_3^2$$

$$v_1^2 = v_2^2 + (\sqrt{2}v_3)^2$$

$\longrightarrow$ Pro fixní $v_1 = r$: $\quad [N_g]_B \Big|_{v_1 = r} = \{v \mid v_1 = r,\ r^2 = v_2^2 + (\sqrt{2}v_3)^2\} \equiv$

kružnice v souřadnicích $v_2, (\sqrt{2}v_3)$ se středem $(r, 0, 0)$ a poloměrem r