· „Aproximátor":

$$\boxed{[P_{\langle u\rangle}]^{B}_{B} = A^{B}_{u}\left(A^{u}_{B}A^{B}_{u}\right)^{-1}A^{u}_{B}}$$

$$A^{B}_{u} := \left([u_1]^{B} \dots [u_n]^{B}\right)$$

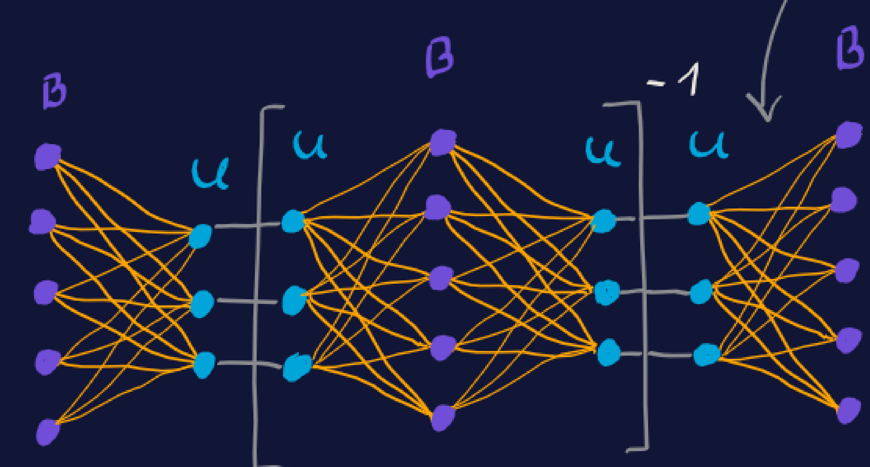
$$A^{u}_{B} := \left(A^{B}_{u}\right)^{\dagger}$$

(platí pokud inverze existuje, tj. pokud jsou sloupce A^{B}_{u} tj. $(u_1, \dots, u_n)$ LNZ)

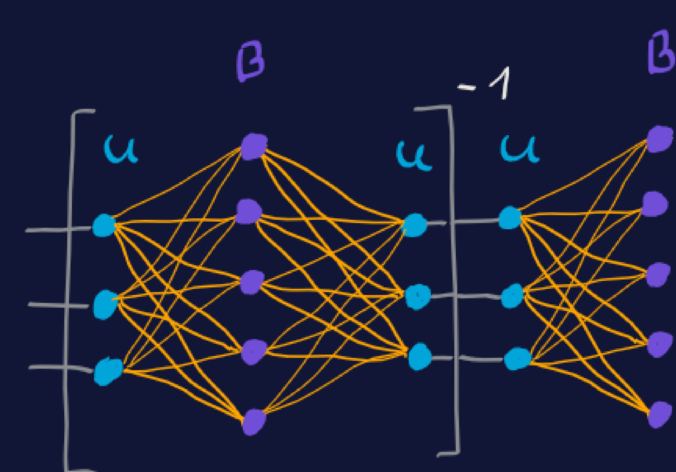
↪ Co když inverze neexistuje?

zlatá spojnice značí element matice $\langle u_i, b_j \rangle$

· Graficky jsme měli:

$[P_{\langle u\rangle}]^{B}_{B} \equiv$ 

se chová jako "identita na $\langle u \rangle$".

↪ Tedy $\left(A^{u}_{B}A^{B}_{u}\right)^{-1}A^{u}_{B} \equiv$ 

slouží jako jakási "inverze"

matice $A^{B}_{u} \equiv$ 

alespoň "z pohledu $\langle u \rangle$".

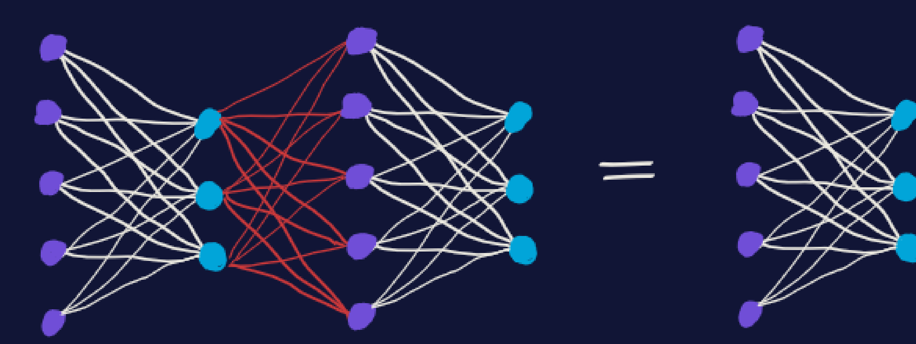
· Tuto pseudoinverzi zobecníme.

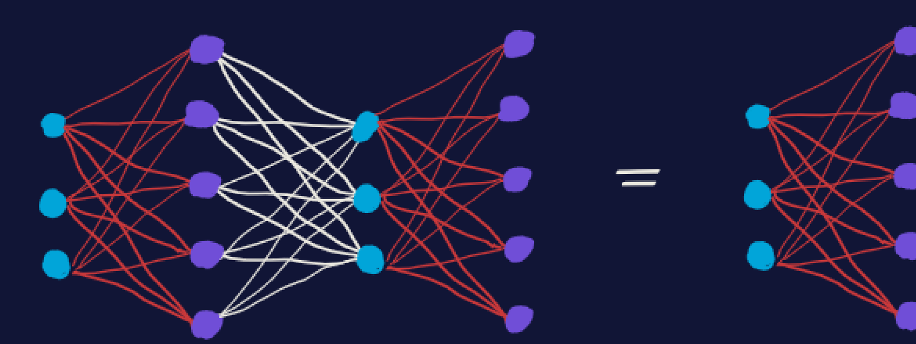
· **Def:** Pseudoinverze $A^\dagger: U \to V$ operátoru $A: V \to U$ splňuje:

(1) $AA^\dagger A \overset{!}{=} A$

(2) $A^\dagger A A^\dagger \overset{!}{=} A^\dagger$

(3) $A^\dagger A$, $AA^\dagger$ jsou hermitovské.

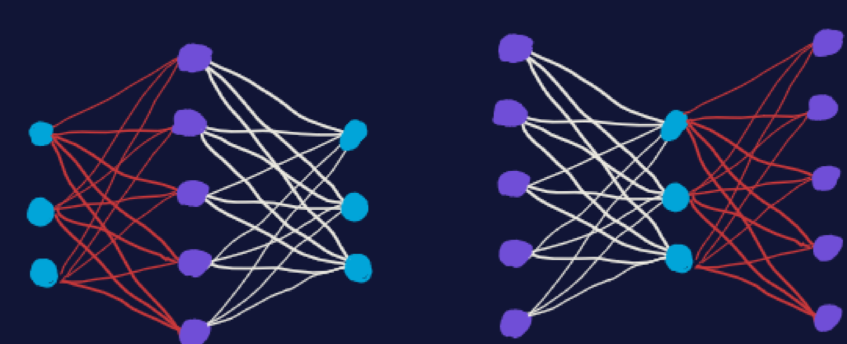




$$\begin{tikzcd} V & U \arrow[l, "A^\dagger"'] \\ V \arrow[r, "A"'] \arrow[ur, "A"] & U \arrow[from=1-1, "A"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} V & U \arrow[l, "A^\dagger"'] \arrow[dl, "A^\dagger"] \\ V \arrow[r, "A"'] & U \arrow[ul, "A^\dagger"'] \end{tikzcd}$$

a je určena jednoznačně (Tvr 57).

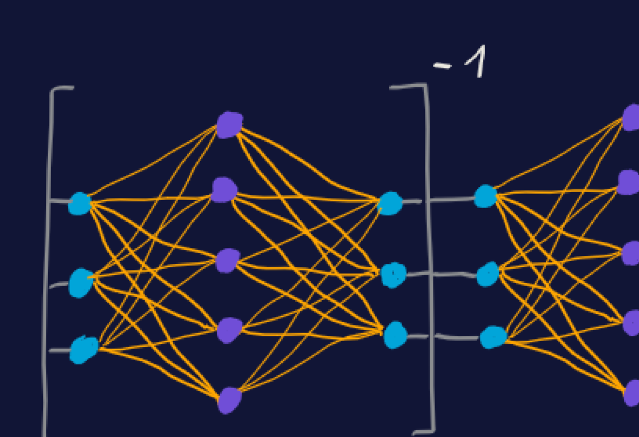


Pozn: Pokud je dimenze definičního oboru větší než dimenze oboru hodnot, stačí pro představu v grafech vyměnit červenou a bílou.

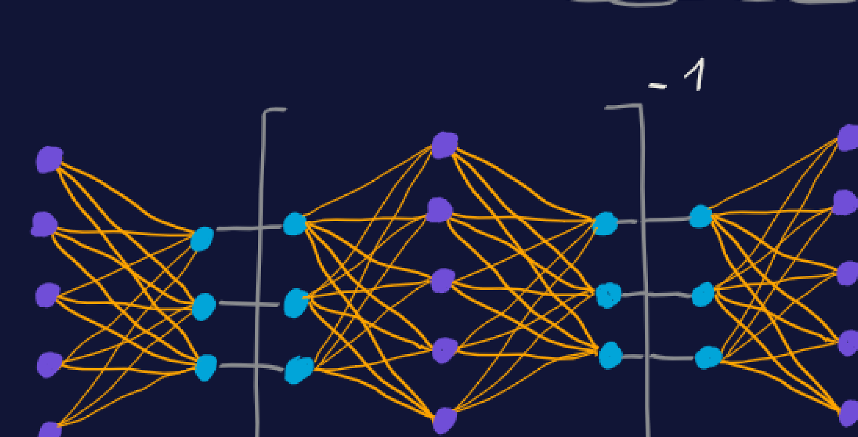
· **Věta 33:**

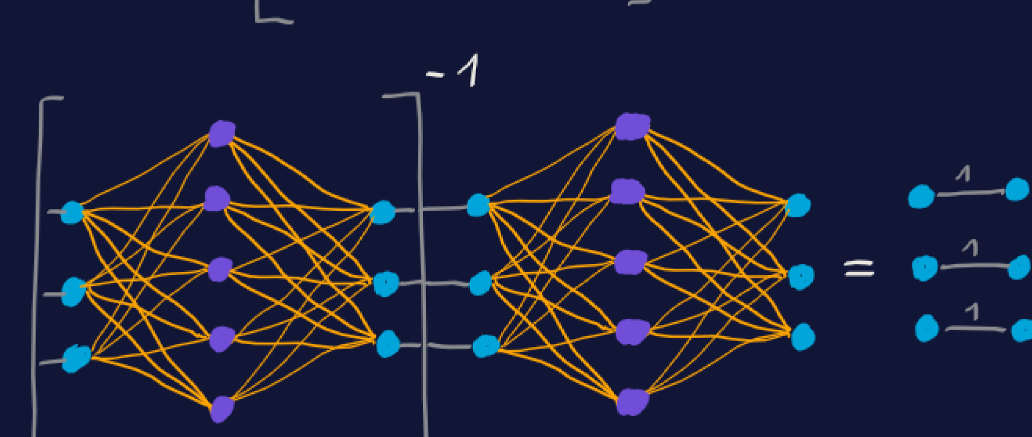
Pro soustavu $Ax = b$ je $A^\dagger b$ aproximativní a zároveň minimální řešení.

· **Pozn:**

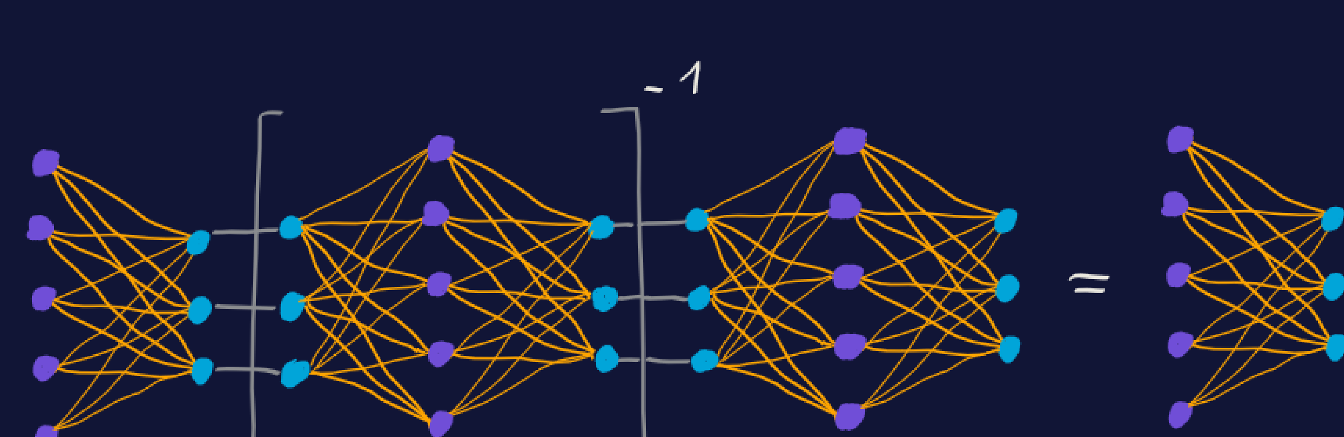
· Pro A matici s LNZ sloupci: $A^\dagger = (A^+A)^{-1}A^+ =$  . Opravdu:

(řádky) $A^\dagger = A^+(AA^+)^{-1}$

$AA^\dagger =$  $= [P_V]^B_B$

$A^\dagger A =$  $= E_V$

hermitovské

$[P_V]^B_B A =$  $= A$ a jistě $E_V A^\dagger = A^\dagger$.

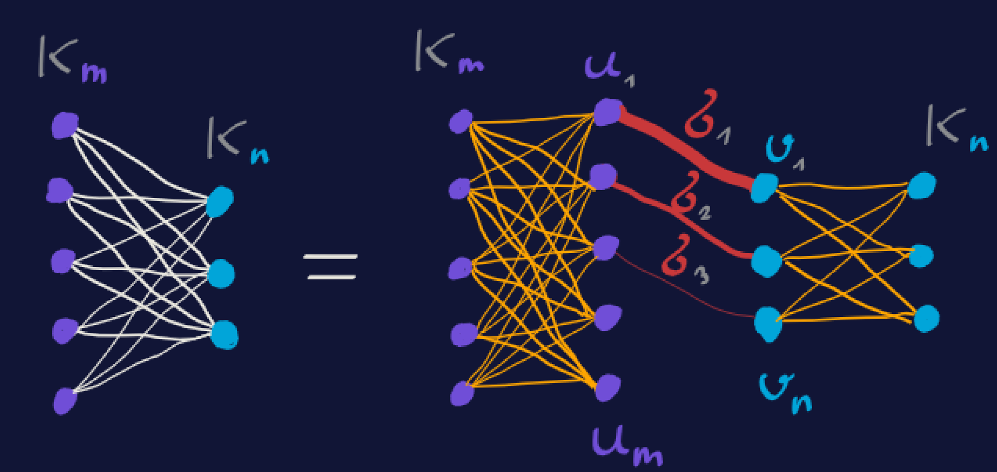
(SVD)

· **Singulární rozklad** matice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$

tzv. singulární hodnoty

unitární

$$A = U \Sigma V^+ = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_m \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & \overline{v}_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \overline{v}_n & - \end{pmatrix}$$



↪ Výpočet:

(1) OG diagonalizace A^+A, tj. vyjádři:

$$V = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \qquad \boxed{A^+A = V\Lambda V^+}$$

diagonální, vl. čísla seřazena od největšího po nejmenší

(2) Definuj singulární hodnoty:

$$\boxed{\sigma_i := \sqrt{\lambda_i}}$$ pro $i = 1,\dots,r$ nenulová vl. čísla; pro $i = r+1,\dots$ jsou σ_i nulová

(3) Definuj $\begin{cases} u_1,\dots,u_r \text{ jako } \boxed{u_i := \frac{1}{\sigma_i} A v_i} \\ u_{r+1},\dots,u_m \text{ libovolně tak, aby } u_1,\dots,u_m \text{ byla ON} \end{cases}$

· Př (zah 1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, ověř si, že $\lambda = 2$ a $\left\{ \begin{array}{l} \text{AlgNás}(\lambda) = 2 \\ \text{GeomNás}(\lambda) = \ker(A - \lambda E) = 1 \end{array} \right\}$ tj. A není diagonalizovatelná.

· SVD rozklad:

(1) $A^+A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$ $\qquad 0 \overset{!}{=} \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 6 \\ 6 & 13-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(13-\lambda) - 36 = 52 - 17\lambda + \lambda^2 - 36 =$

$= \lambda^2 - 17\lambda + 16 = (\lambda - 1)(\lambda - 16)$

$\Rightarrow$

$\lambda_1 = 16 \qquad \ker\begin{pmatrix} 4-16 & 6 \\ 6 & 13-16 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1 \qquad \ker\begin{pmatrix} 4-1 & 6 \\ 6 & 13-1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) $\sigma_1 := \sqrt{\lambda_1} = 4$, $\quad \sigma_2 := \sqrt{\lambda_2} = 1$

(3) $u_1 := \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$u_2 := \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{A = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

· **Polární rozklad** čtvercové matice A je jednoznačný rozklad na:

$$A = \underbrace{W}_{\text{unitární}}\underbrace{P}_{\text{hermitovská, pozitivně definitní}}$$

↳ Pomocí SVD:

$$A = U\Sigma V^+ = \underbrace{UV^+}_{W}\,\underbrace{V\Sigma V^+}_{P}$$

· Pozn: Pro $z \in \mathbb{C}^{1\times 1}$: $z = e^{i\varphi}\cdot|z|$

· Př (Zah 1)

· Polární rozklad:

SVD rozklad už máme

$$A = \begin{pmatrix}2&3\\0&2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}$$

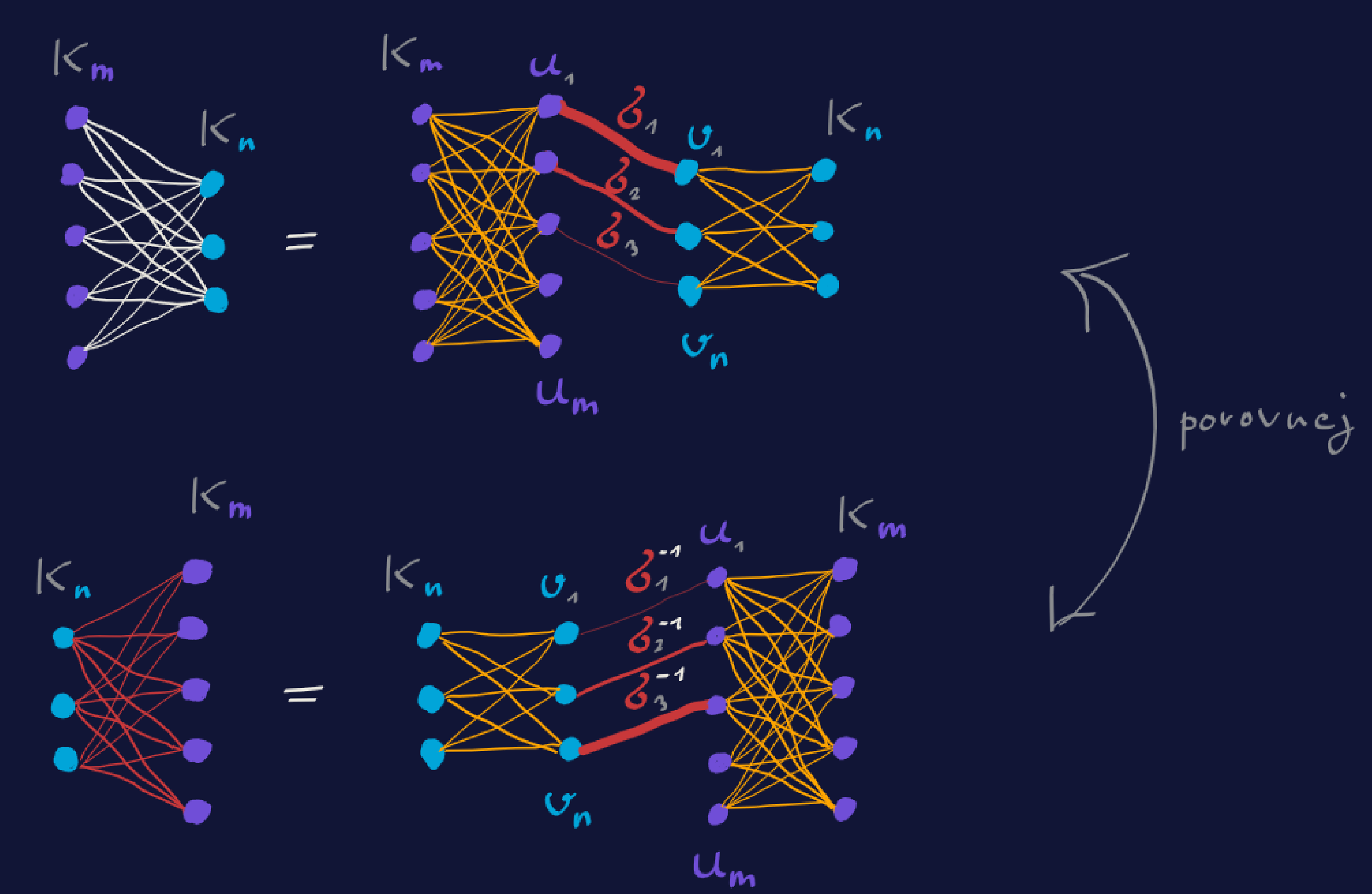
$$W = \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix} = \frac15\begin{pmatrix}4&3\\-3&4\end{pmatrix}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix} = \frac15\begin{pmatrix}8&6\\6&17\end{pmatrix}$$

· Konečně, ze SVD rozkladu:

$$A = U\Sigma V^+$$

získáme pseudoinverzi.



· Tvrzení: $\boxed{A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^+}$

kde $\Sigma^\dagger \equiv \begin{pmatrix}\sigma_1^{-1} & 0\\ 0 & \ddots\end{pmatrix}$

· Př (Zákl 1) Najdi pseudoinverzi matic: $A = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $B = (1\;1)$, $C = \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$

· A má LNZ sloupce: $A^\dagger = (A^+A)^{-1}A^+ = \left((1\;1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)^{-1}(1\;1) = \frac12(1\;1)$

· B má LNZ řádky: $B^\dagger = B^+(BB^+)^{-1} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\left((1\;1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)^{-1} = \frac12\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

· Singulární rozklad C:

$$C = U\Sigma V^+ = \dots = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt2&0\\0&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$C^\dagger = V\Sigma^\dagger U^+ = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \frac12\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$$

· Víc o maticích jako grafech, základní myšlence zavedení pravděpodobnosti (v kvantové mechanice) pomocí skalárního součinu a souvislosti SVD a entanglementu na blogu Math3ma

↳ "Viewing Matrices & Probability as Graphs"

↳ "A First Look at Quantum Probability, Part 1,2"

↳ "Understanding Entanglement with SVD"