- **Připomenutí:** $P_W(v)$ je „aproximace" v v podprostoru W, protože má minimální „střední kvadratickou odchylku" od v.

generátory; čím aproximujeme

$$W = \langle \overbrace{\mathcal{U}} \rangle \equiv \langle u_1, \dots, u_k \rangle$$

co aproximujeme, „pravá strana"

koeficienty výsledku („$\mathcal{U}$-reprezentace")

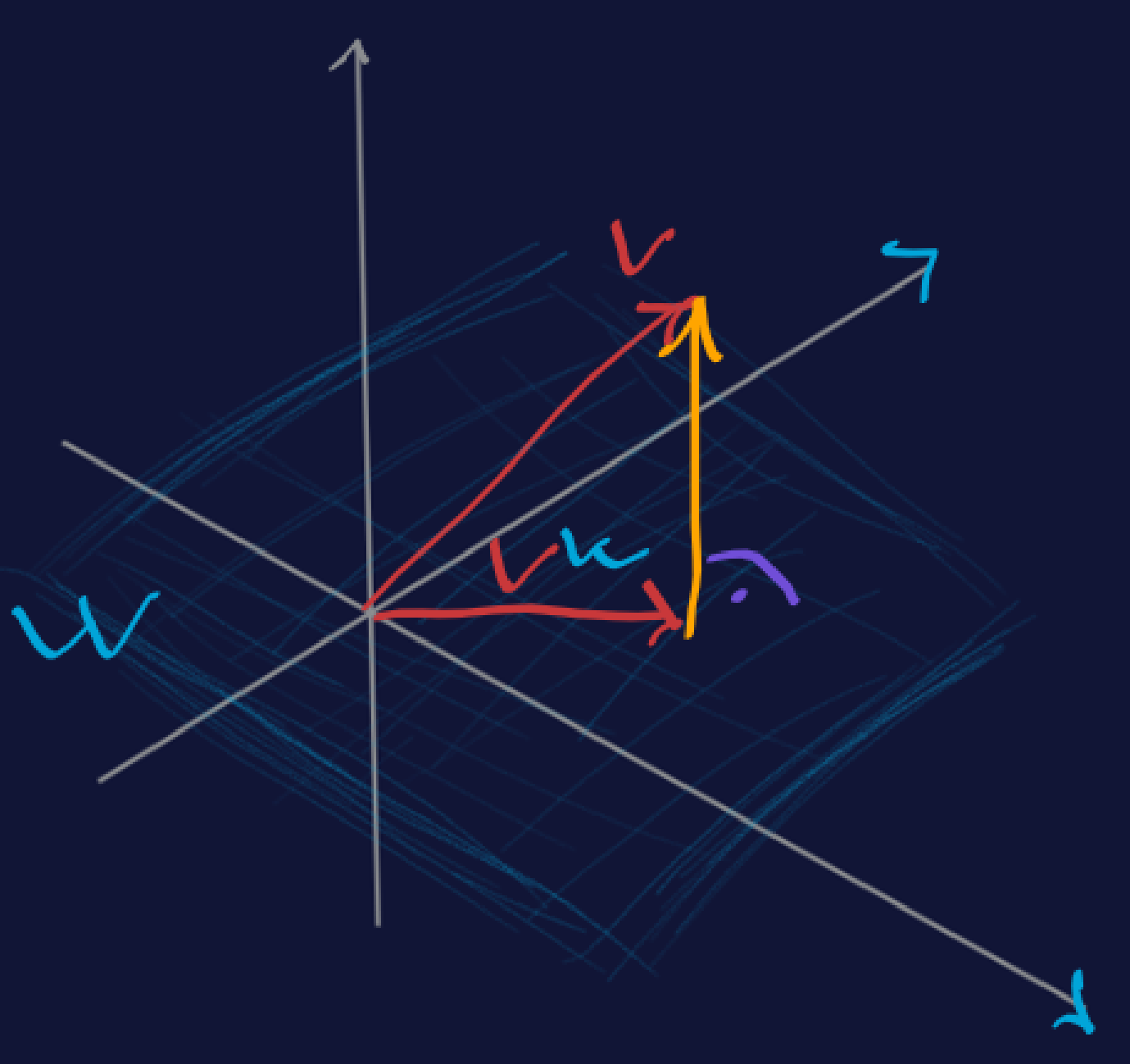
$$v \xmapsto{P_W} P_W(v) \equiv \sum_{i=1}^{k} x_i^{\mathcal{U}} u_i$$

Charakterizace OG projekce

$$v^W = P_W(v) \iff W \perp (v - v^W)$$

$$\iff \langle u_i, v - v^W \rangle = 0$$

$$\iff \langle u_i, v^W \rangle = \langle u_i, v \rangle$$



↳ Souřadnice projekce $x^{\mathcal{U}}$ jsou řešení normální soustavy:

$$\boxed{A^{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}} A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}} x^{\mathcal{U}} = A^{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}} [x]^{\mathcal{B}}}$$

$\mathcal{B} \equiv (b_1, \dots, b_n)$ ON báze

$$A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}} := \left([u_1]^{\mathcal{B}} \dots [u_k]^{\mathcal{B}} \right)$$

$$A^{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}} := \left(A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}} \right)^{\dagger}$$

⇒ Projektor: $\boxed{\left[P_{\langle \mathcal{U} \rangle} \right]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}} \left(A^{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}} A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}} \right)^{-1} A^{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}}$

- **Přeurčená soustava** (tj. bez řešení)

Př (Zah 1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \underbrace{}_{u_1} \underbrace{}_{u_2} \end{matrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \text{kanonická}, \quad \text{aproximativní řešení } Ax = b \,?$$

(1) $Ax = b$ nemá řešení (tj. soustava je přeurčená)

↳ Frobeniova věta

(2) Normální soustava

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}} A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}} x^{\mathcal{U}} = A^{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}} x^{\mathcal{B}}$$

$$A^T A x = A^T b$$

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(3) OG projektor na $\operatorname{Im} A$

$$\left[P_{\operatorname{Im} A} \right]^{\mathcal{K}}_{\mathcal{K}} = A (A^T A)^{-1} A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \dots = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Př** (Zákl 1)
  - Prolož body [-2, 3], [-1, -2], [0, 1], [1, 2] lineární funkcí $f(x) = \alpha x + \beta$ metodou nejmenších čtverců.

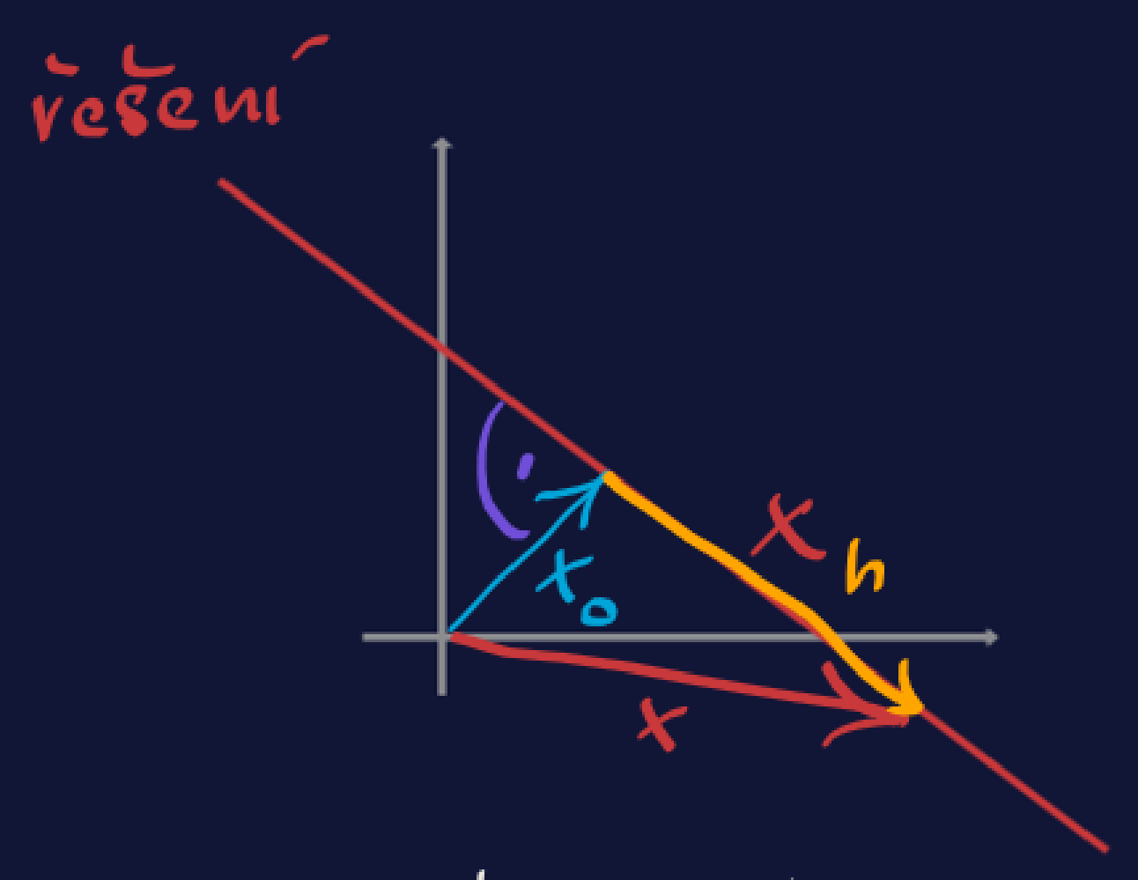
Aproximativní řešení rovnice: $\alpha . x + \beta = y$ ⟺ Aproximativní řešení soustavy: $\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\min_{\alpha,\beta} \| f(x) - y \|$

↪ Normální soustava

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff f(x) = 0.x + 1 = 1$$

- **Podurčená soustava**



- Soustava $Ax = b$ s řešením $x_p + \ker A$.
- Skalární součin dává rozštěpení: $\ker A \oplus (\ker A)^{\perp} = \ker A \oplus \underbrace{\operatorname{Im} A^{+}}$

↪ Mezi řešeními hledáme jedno význačné, tj. to příslušející do v rámci rozštěpení.

$$x = x_0 + x_h \equiv P_{\operatorname{Im} A^{+}}(x) + P_{\ker A}(x)$$

$$\boxed{x_0 = P_{\operatorname{Im} A^{+}}(x) = A^{+}(AA^{+})^{-1} b}$$

jako u přeurčené s $A \longmapsto A^{+}$

- **Př** (Zákl 2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Ax = b$$

$$AA^{+} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dots = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- **Hint** (Zákl 5)
  - Najdi podurčenou soustavu s řešením $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, hledej „$x_0$".