• Operátor (tj. lin zobrazení) $A^*: W \to V$ je **sdružený** k $A: V \to W$, tj pro $\forall v \in V, \forall w \in W$:

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, A^* w \rangle$$

↳ Maticově $(A \cdot v)^\dagger \cdot g \cdot w = v^\dagger g \cdot (A^* w)$

pro $g = E$

$$v^\dagger A^\dagger w = v^\dagger A^* w$$

• Operátor je:

↳ **Normální**, pokud $AA^* = A^*A$

↳ **Hermitovský**, pokud navíc $H^* = H$

reálné spektrum

↳ **Unitární**, pokud navíc $U^* = U^{-1}$

spektrum na jednotkové kružnici

• Věta (29)

A je normální $\iff$ A je ortogonálně diagonalizovatelný (tj. $\exists$ OG vlastní báze)

• Spektrální rozklad

↳ Pro $\forall$ normální operátor A platí:

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda$$

hermitovský OG projektor na vl. podprostor příslušný vl. číslu λ

• Důsledek:

Vlastní podprostory normálního operátoru jsou navzájem kolmé.

$$V_\lambda \perp V_{\lambda'} \quad \text{, pro } \lambda \neq \lambda'.$$

ON báze V_λ

ON báze $V_{\lambda'}$

• Důkaz: $\langle v, w \rangle = \sum_i x_i \sum_j y_j \langle v_i, w_j \rangle = 0$ ∎

↳ Pro $v \in V_\lambda$, $w \in V_{\lambda'}$: $v = P_\lambda v$, $w = P_{\lambda'} w$

$$\langle v, w \rangle = \langle P_\lambda v, P_{\lambda'} w \rangle = \langle v, \underbrace{P_\lambda P_{\lambda'}}_{0} w \rangle = 0$$

$$P_\lambda P_{\lambda'} u \overset{V46}{=} (P_{v_1} + \dots + P_{v_r})(P_{w_1} + \dots + P_{w_s}) u = 0$$

$$P_{v_i} P_{w_j} u = \langle v_i, \langle w_j, u \rangle w_j \rangle v_i = \langle w_j, u \rangle \underbrace{\langle v_i, w_j \rangle}_{0} v_i = 0$$

ON báze, $v_i \neq w_j$

V řeči projektorů

· Př (Zah 1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $(\mathbb{C}^2, \langle , \rangle_{st})$

(1) A je normální:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$$

(2) OG diagonalizace A

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 + 9 = \lambda^2 - 4\lambda + 13$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$

$$V_1 = \ker\begin{pmatrix} 2-2-3i & -3 \\ 3 & 2-2-3i \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_2 = \ker\begin{pmatrix} 2-2+3i & -3 \\ 3 & 2-2+3i \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(\bar{i} \ \bar{1})\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = (-i \ 1)\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0$$

ON báze: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right) \equiv (u_1, u_2)$

(4) Spektrální rozklad

$$\mathbb{P}_{u_1} v = \langle u_1, v \rangle_{st}\, u_1 = u_1 \cdot u_1^{\dagger} \cdot v$$

$$[\mathbb{P}_{u_1}]_K^K = u_1 \cdot u_1^{\dagger} \ \text{„}\equiv |u_1\rangle\langle u_1|\text{"}$$

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^{\dagger} + \lambda_2 u_2 u_2^{\dagger} =$$

$$= (2+3i)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(-i, 1) + (2-3i)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(i, 1) =$$

$$= (2+3i)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} + (2-3i)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

· Hint (Zákl 5)

· Spektrum antihermitovského operátoru?

$$\mathbb{A}^* = -\mathbb{A}$$

↪ Zkopíruj strategii důkazu věty 31.