OG báze podprostoru W

$C = \{c_1, \dots, c_n\}$

$\rightsquigarrow$ $W = \langle C \rangle$ $\rightsquigarrow$

OG Projekce na W

$P_W = P_{c_1} + \dots + P_{c_n}$

G-S ortogonalizace

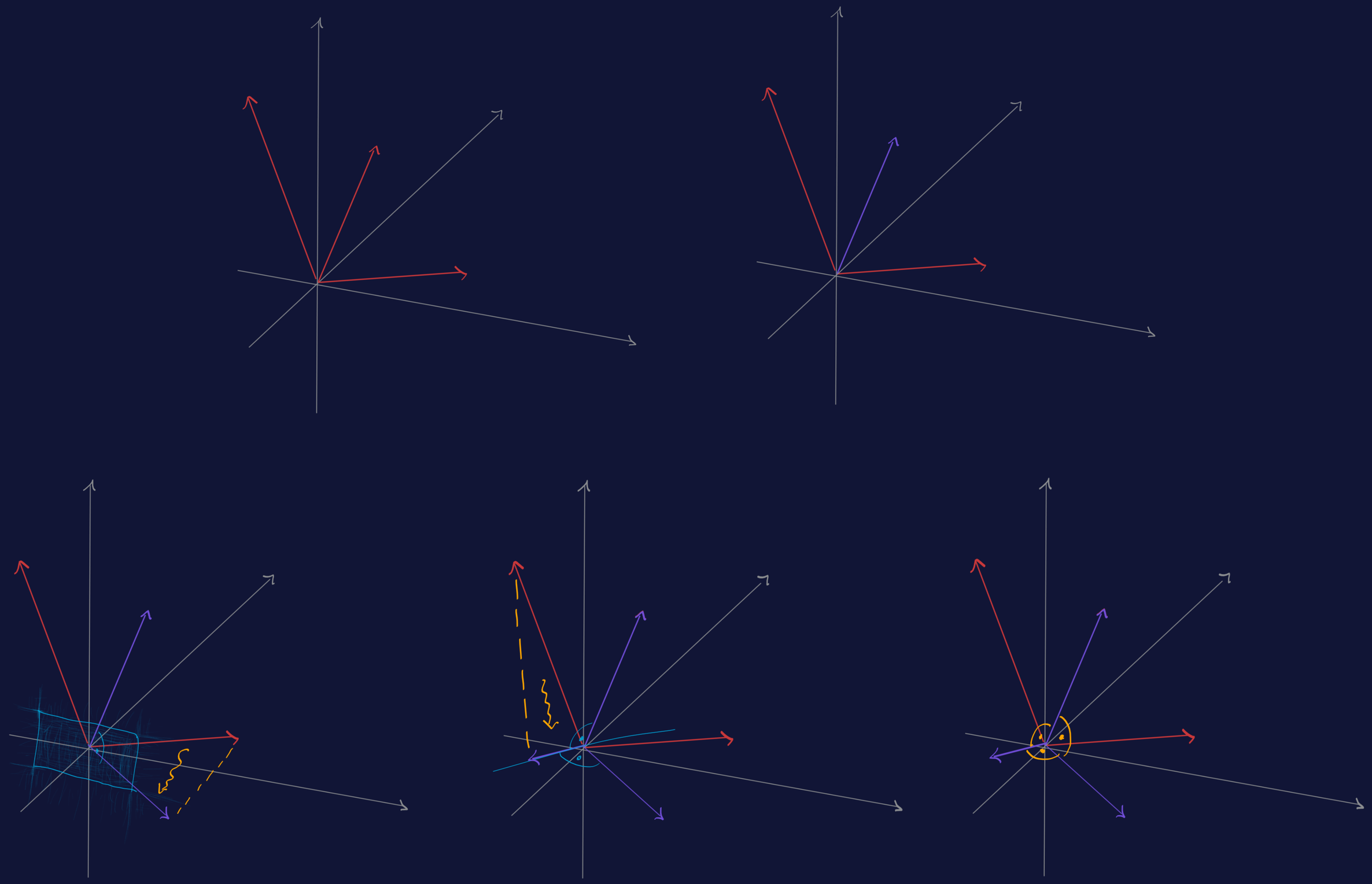
$\|$

Obecná báze podprostoru W

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$

$\rightsquigarrow$ $W = \langle B \rangle$

Gram-Schmidtova ortogonalizace



Gram-Schmidtova ortogonalizace

- Máme bázi $B = (b_1, \dots, b_n)$, $\langle , \rangle$, chceme OG-bázi $C = (c_1, \dots, c_n)$.

(1) Vybereme lib. prvek B (např. b_1) a definujeme

$$c_1 := b_1$$

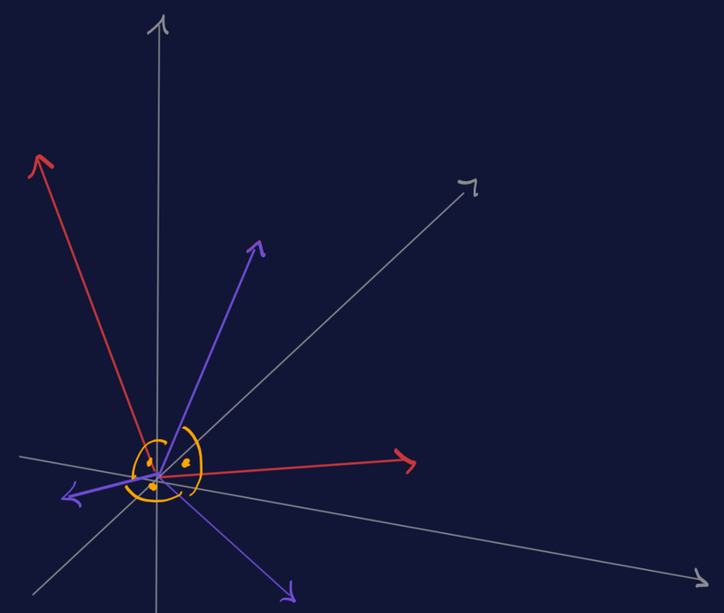
(2) Projekce b_2 na prostor kolmý na c_1

$$c_2 := P_{c_1}^{\perp}(b_2) = b_2 - \frac{1}{\|c_1\|^2}\langle c_1, b_2\rangle c_1$$

(3) Projekce b_3 na prostor kolmý na c_1 a c_2

$$c_3 := P_{\langle c_1, c_2\rangle}^{\perp}(b_3) = b_3 - \frac{1}{\|c_1\|^2}\langle c_1, b_3\rangle c_1 - \frac{1}{\|c_2\|^2}\langle c_2, b_3\rangle c_2$$

⋮ pokračujeme, dokud nezískáme všechny $(c_1, \dots, c_n)$



Vizualizace pro $n = 3$

· Př (Zah 1)

$$\left(\mathbb{R}^4, \langle , \rangle_{st}\right), \quad W = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\\1\\-1\end{pmatrix}}_{w_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}3\\1\\4\\1\end{pmatrix}}_{w_3} \right\rangle$$

(1) ON báze W?

↳ Nejdříve nalezneme OG bázi:

$$c_1 := w_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \|c_1\|^2 = 1+1+1 = 3$$

$$c_2 := w_2 - \frac{1}{\|c_1\|^2}\langle c_1, w_2\rangle c_1 = \begin{pmatrix}2\\3\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}(3+1-1)\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\\-2\end{pmatrix}, \quad \|c_2\|^2 = 4+4+4 = 12$$

$$c_3 := w_3 - \frac{1}{\|c_1\|^2}\langle c_1, w_3\rangle c_1 - \frac{1}{\|c_2\|^2}\langle c_2, w_3\rangle c_2 = \begin{pmatrix}3\\1\\4\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}(1+4+1)\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{12}(6+2-2)\begin{pmatrix}2\\2\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\2\\0\end{pmatrix}, \quad \|c_3\|^2 = 12$$

ON báze:

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)}$$

· **Def:** QR-rozklad matice $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ s LNZ sloupci je následující dvojice matic $Q \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

$$A = \overbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ c_1 & \cdots & c_n \\ | & & | \end{pmatrix}}^{Q} \overbrace{\begin{pmatrix} \langle c_1, a_1\rangle & \langle c_1, a_2\rangle & \cdots & \langle c_1, a_n\rangle \\ 0 & \langle c_2, a_2\rangle & \cdots & \langle c_1, a_n\rangle \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \langle c_n, a_n\rangle \end{pmatrix}}^{R}$$

výsledná ON báze po G-S ortogonalizaci $(a_1, \dots, a_n)$

Fourierovy koeficienty $a_1, \dots, a_n$ vzhledem k ON bázi $(c_1, \dots, c_n)$

- Pokud je tato Q čtvercová, je unitární $Q^{-1} = Q^{\dagger}$.
- R je horní trojúhelníková.
- QR rozklad je jednoznačný.

· Př (Zah 1) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(2) Fourierovy koeficienty generátorů w_1, w_2, w_3 vzhledem k $C = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

$\langle c_1, w_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} 3$, $\langle c_1, w_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} 3$, $\langle c_1, w_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} 6$

$\langle c_2, w_1\rangle = 0$, $\langle c_2, w_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} 6$, $\langle c_2, w_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} 3$

$\langle c_3, w_1\rangle = 0$, $\langle c_3, w_2\rangle = 0$, $\langle c_3, w_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} 6$

(4) QR rozklad matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Ověř, že skutečně: $QR = A$

- <u>Hint</u> (Zákl 2)

- QR rozklad matice A, $\underbrace{\det Q,\ Q^{-1}}$.

Využij vlastnosti det a matic v rozkladu!

- <u>Hint</u> (Zákl 5)

- $W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, najdi ON bázi prostoru $W^\perp$,

která obsahuje kladný násobek $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

↳ Možný postup: (i) Najdi nějakou bázi $W^\perp$ z definice.

(ii) Nahraď některý z bázových vektorů v_j tak, aby se nezměnil lin. obal (viz. např. cvičení #5 ze zimního semestru).

(iii) G-S ortogonalizace, $c_1 := v$.