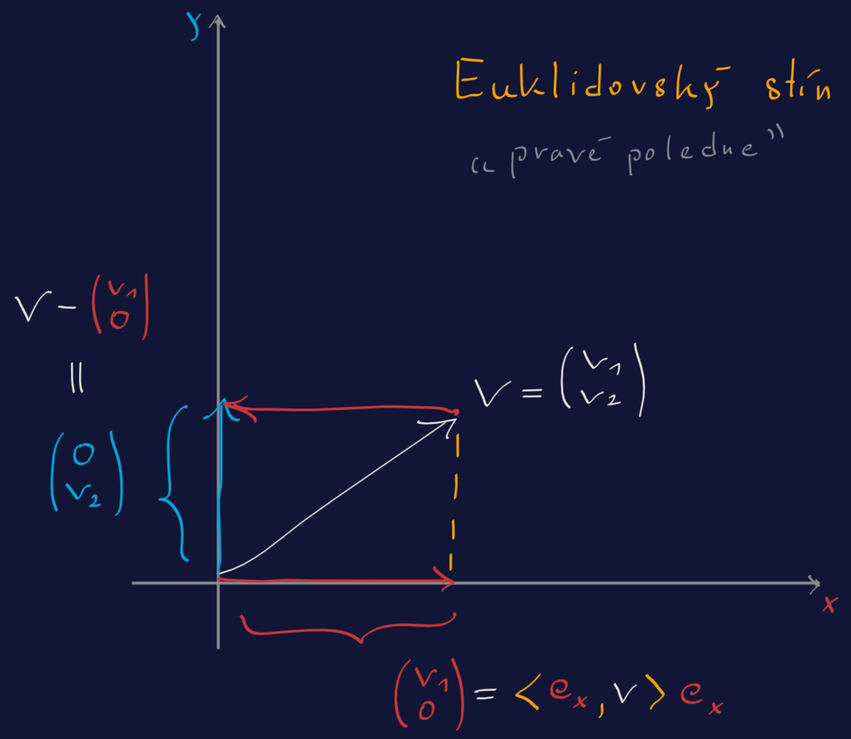
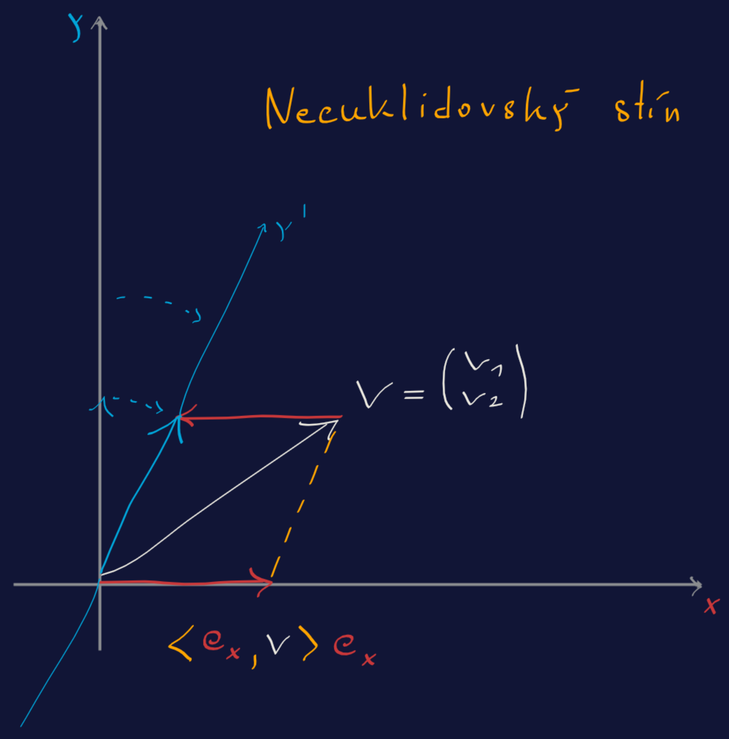
Euklidovský stín

„právě poledne"



Neeuklidovský stín



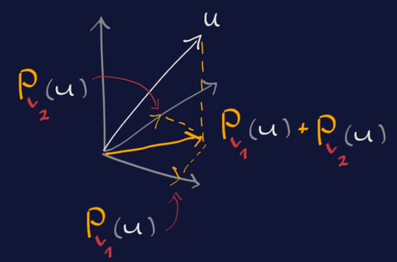
· **Def**: OG projekce na vektor v pomocí skalárního součinu $\langle , \rangle$:

$$P_v(u) := \frac{1}{\|v\|^2}\langle v, u\rangle v$$

↳ tj. pro „normalizovaný vektor" $\|v\| = 1$, „$P_v = \langle v, \; \rangle v$"

· OG projekce na podprostor $W \leq V$ s OG bází $(v_1, \dots, v_m)$:

$$P_W := P_{v_1} + \dots + P_{v_m}$$



· **Vlastnosti**

· P_W je lineární a $P_W^2 = P_W$ } „projekce"

· $\operatorname{Im} P_W = W$

↳ Dokonce $P_W(v) = v$ pro $\forall v \in W$.

· $\ker P_W = W^\perp$

· $W \oplus W^\perp = V$

↳ To je jen jinak řečené $\ker P_W \oplus \operatorname{Im} P_W = V$.

· P_v (zah 1):

Uvažme $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle_{st})$ (standardní), $u = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $W = \langle u, v\rangle$ (<, > závorky zde znamenají lin. obal)

(1) (u, v) ON? $\langle u, v\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(1.1 + 1.(-1) + 0) = 0$

$\langle u, u\rangle = 1$, $\langle v, v\rangle = 1$

(2) $\left[P_W\right]_k^k = \left[P_u + P_v\right]_k^k = \left[P_u\right]_k^k + \left[P_v\right]_k^k = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ -1 & 5 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$

$\left[P_u\right]_k^k = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $\quad \left[P_v\right]_k^k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

(3) $P_W\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ -1 & 5 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \in W$

$\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - P_W\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right] \in \ker P_W = W^\perp$

} $\left[P_W + \left(\mathrm{id} - P_W\right)\right]\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

(4) Báze $W^\perp = \ker P_W$

$\ker\left[P_W\right]_k^k = \ker\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ -1 & 5 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 5 & 2\\ 5 & -1 & 2\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 6 & 3\\ 0 & -6 & -3\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\ker\left[P_W\right]_k^k = \left\langle\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\rangle \Rightarrow \ker P_W = \left\langle\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\rangle \Rightarrow \left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$ je báze $W^\perp$.

· OG Projekce na OG doplněk:

$$\left(\mathrm{id} - P_W\right) = P_{W^\perp}$$

↳ Platí: $P_{W^\perp} \circ P_W = 0$

· P_V (zah 1)

(5) $(\underbrace{\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_{st}}_{\mathbb{E}^n})$, vektory u, v s normou 1, $\langle u, v \rangle = 0$, $W = \langle u, v \rangle \leq \mathbb{R}^n$.

(standardní)

· Připomenutí: $\langle x, y \rangle_{st} = (x_1 \cdots x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \equiv x^T \cdot y$

$$P_W(x) = P_u(x) + P_v(x) = (u^T \cdot x)u + (v^T \cdot x)v = u \cdot u^T \cdot x + v \cdot v^T \cdot x = \underbrace{(u \cdot u^T + v \cdot v^T)}_{[P_W]^k_k} \cdot x$$

· Hint (Zák 4)

Vl. čísla a vektory P_W?

- $P_W(v) = v$, pro $\forall v \in W$
- $P_W(u) = 0.u$, pro $\forall u \in W^\perp$
- Platí $W \oplus W^\perp = V$.

· Hint (Zák 5)

· Najdi aproximaci funkce x^2 v podprostoru $\langle 1, \sin x, \cos x \rangle$ na $[-\pi, \pi]$, pro kterou je $\int_{-\pi}^{\pi} [x^2 - (a + b \sin x + c \cos x)]^2 dx$ nejmenší možné.

· Tvrzení: Mějme podprostor W unitárního V. Pak pro $(\forall u \in V), (\forall v \in W)$:

$$\| u - \underbrace{P_W(u)}_{\text{aproximace } u \text{ v podprostoru } W} \| \leq \| u - v \|$$

Tady se bude hodit takový $\langle , \rangle$, že:

$$\langle f, f \rangle \equiv \|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx$$