$$A \rightsquigarrow \exp(tA)$$

"infinitesimální generátor transformace" — "za čas t nastřádaná konečná transformace"

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = R_t$$

"infinitesimální generátor transformace" — "za čas t nastřádaná konečná transformace"

$$i \rightsquigarrow \exp(it)$$

"infinitesimální generátor transformace" — "za čas t nastřádaná konečná transformace"

· **Def:** Maticová exponenciála

$$\exp A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

· **Tvrzení:** „Maticová exponenciála se chová jako exponenciála."

- $[A,B] = 0 \Rightarrow \exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ } sčítání ⇝ násobení
- $\exp(-A) = (\exp A)^{-1}$ } aditivní inverze ⇝ multiplikativní inverze
- $\exp(RAR^{-1}) = R \exp(A) R^{-1}$
- $\exp(\mathrm{Tr}\, A) = \det(\exp A)$
- $\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA)$ (exp(tA): „parametrizovaná exponenciála")

„A jako infinitesimální transformace"

$$\left.\frac{d}{dt} \exp(tA)\right|_{t=0} = A$$

· Př. (Zoh 1) „exp ručně, hezká matice"

$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, platí: $A^{4l} = E$, $A^{4l+2} = -E$, $A^{4l+1} = A$, $A^{4l+3} = -A$.

$$\exp A = \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \dots\right] E + \left[\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots\right] A = \cos(1)E + \sin(1)A = \begin{pmatrix} \cos(1) & i\sin(1) \\ i\sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}$$

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \cos(t) & i\sin(t) \\ i\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

připomenutí z analýzy

$$\exp t \equiv 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \dots$$

liché: $\sin t := t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \dots = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$ $\quad \sinh t := t + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + \dots = \frac{1}{2i}(e^{t} - e^{-t}) = -i\sin(it)$

sudé: $\cos t := 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \dots = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ $\quad \cosh t := 1 + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + \dots = \frac{1}{2}(e^{t} + e^{-t}) = \cos(it)$

· Mocnina λ-buňky $J_{\lambda,j}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \cdots & \binom{n}{j-1}\lambda^{n-(j-1)} \\ & \lambda^n & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & n\lambda^{n-1} \\ 0 & & & \lambda^n \end{pmatrix}$

· Exponenciála Jordanovy buňky

· Mocnina 0-buňky: $J_{0,j}^n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$ ((n+1)tý sloupec) $\rightsquigarrow$ Exponenciála 0-buňky: $\exp\left(J_{0,j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \cdots & \frac{1}{(j-1)!} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{1!} \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

· Exponenciála λ-buňky:

$$\exp\left(J_{\lambda,j}\right) = \exp\left(\lambda E + J_{0,j}\right) \underset{[E,J]=0}{=} \exp\left(\lambda E\right)\exp\left(J_{0,j}\right) = \begin{pmatrix} e^\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & e^\lambda \end{pmatrix}\exp\left(J_{0,j}\right)$$

· Parametrizovaná exponenciála λ-buňky:

$$\exp\left(tJ_{\lambda,j}\right) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & & & 0 \\ & e^{t\lambda} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{t\lambda} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{t}{1!} \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

· Př (Zákl 1)

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\exp A = ?$ Víme: $\sigma(A) = \{1, -1\}$, $\begin{matrix} \downarrow \\ 0 \end{matrix}\ \begin{matrix} \downarrow \\ 0 \end{matrix}$

a známe rozklad: $A = RJR^{-1}$

↳ $\exp A = R\exp(J)R^{-1}$ ↑ dosad

↳ $\exp(J) = \left(\begin{array}{cc|c} \exp J_{1,2} & & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{-1} \end{array}\right)$ ← dosad, kde $J = \left(\begin{array}{cc|c} J_{1,2} & & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$

↳ $\exp\left(J_{1,2}\right) = \begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^1 \end{pmatrix}\exp\left(J_{0,2}\right) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}$

· **Věta 41:**

$\mathbb{C}^{n\times n}$ ⇓ A — parametrizovaný vektor $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ — derivace podle t

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) \quad \& \quad x(0) \overset{!}{=} c$$

počáteční podmínka

jediné řešení ⇝ $\boxed{x(t) = \exp(tA)\,c}$

"V každém čase t je okamžitá deformace vektoru x dána generátorem A" ⇝ "Vektor v čase t získáme z počátečního vektoru c působením deformace nastřádané za čas t; $\exp(tA)$."

· **Př** (Zakl 2)

$$\dot{x}_1(t) = 5x_1(t) - 3x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = 3x_1(t) - x_2(t), \quad x(0) \equiv c$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \text{ jediné řešení: } \exp(tA)\,c$$

↳ Jordanův tvar: $A = RJ_{2,2}R^{-1}$, $R = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

↳ $\exp(tJ_{2,2}) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$

↳ $\exp(tA) = R\exp(tJ_{2,2})R^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 3t+1 & -3t \\ 3t & 1-3t \end{pmatrix}$

↳ $\exp(tA)\,c = e^{2t}\begin{pmatrix} 3t+1 & -3t \\ 3t & 1-3t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

· **Věta 42** (Variace konstant)

$\boxed{\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t)}$ ⇝ všechna řešení $\boxed{x(t) = \exp(tA)\,c(t)}$

kde $\dot{c}(t) = \exp(-tA)\,b(t)$.