5.5 – SYMETRICKÁ, REGULÁRNÍ, POSITIVNĚ DEFINITNÍ

Josef Kučera

- ORTHOGONÁLNÍ PROJEKCE VEKTORU NA PODPROSTOR (ORTHONORMALISOVANÝ)

$$P_W(v) = \langle w_1 | v \rangle w_1 + \dots + \langle w_n | v \rangle w_n \qquad v = \underbrace{P_W(v)}_{w} + \underbrace{P_{W^\perp}(v)}_{u}$$

- GRAM – ŠMID $\perp$

$$v_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_i | u_{k+1} \rangle}{\langle v_i | v_i \rangle} v_i \qquad a: W^{T} = \langle \vec{x} \rangle, \; W^T \vec{x} = 0$$

$$R = \begin{pmatrix} \langle q_1 | a_1 \rangle & \langle q_1 | a_n \rangle \\ \langle q_n | a_1 \rangle & \langle q_n | a_n \rangle \end{pmatrix}$$

FOURIERŮV KOEFICIENTY

- $QR = A$ (s LNZ sloupci) $\quad A = \overset{LNZ}{\left(\,||||\,\right)} = \underbrace{\overset{ON}{\left(\,||||\,\right)}}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \ddots & * \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}}_{R}$
- OG. PROJEKCE NA JÁDRO $A \to$ $\quad P_\perp = B(B^+B)^{-1}B^+ \quad B\,(b_1 | \dots | b_n)\ b_i \in \operatorname{Ker} A$
- SPEKTRÁLNÍ ROZKLAD OPERÁTORU $A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda$ ← operátor OG projekce na vlastní prostor k λ

- PŘEURČENÁ SOUSTAVA $A^+A x = A^+ b$; $PSV = b$, x = řešeno, A matice koeficientů u x $(x^2, (x-1), \dots)$
  LNZ sloupce ↗ LNZ řádky ↘
  $x = (A^+A)^{-1}A^+ b$
- PODURČENÁ SOUSTAVA $x_0 = A^+(AA^+)^{-1} b = A^+(AA^+)^{-1} A x$ $\quad x$ = obecné řešení, x_0 = řešení s nejmenší normou

- PSEUDOINVERSE, LNZ SLOUPCE $A^{\dagger} = (A^+A)^{-1}A^+$, LNZ ŘÁDKY $A^{\dagger} = A^+(AA^+)^{-1}$, $A^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x^{\dagger} & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

→ LZ obojí: ① $A^+A = \tilde{A}$; ② $\sigma_{\tilde{A}} = \sqrt{\lambda_1} \geq \dots \geq \sqrt{\lambda_m}$; ③ $\Sigma_A = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$; $\Sigma_A^{\dagger} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}$

④ $V_{\tilde{A}} = \left(\| \vec{v}_{\lambda_1} \| \dots \| \vec{v}_{\lambda_n} \| \right)$ (unitární); ⑤ $\vec{u}_i = \left(\frac{1}{\sigma_i} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \right) A \vec{v}_{\lambda_i}$ ⇒ U (unitární) doplníme

⑥ $A = U \Sigma V^+$ – SINGULÁRNÍ ROZKLAD; ⑦ $A^{\dagger} = V \Sigma^{\dagger} U^+$; ⑧ $A_\square = (UV^+)(V\Sigma V^+)$ POLÁRNÍ ROZKLAD OPERÁTORU

- QUAD FORMY $G_S = \frac{1}{2}(G + G^T)$ | $G_A = \frac{1}{2}(G - G^T)$
- SIGNATURA (p, q, n): vl. čísla, SYMETRISACE, (⌐⌐), SYLVESTER $\det \neq 0$ $\left(\frac{1}{|G_1|}, \frac{|G_1|}{|G_2|}, \dots, \frac{|G_{n-1}|}{|G_n|} \right)$ ZMĚNA JEST ŽIVOT

DET $\tilde{A} \neq 0$

- QUADRIKY $\tilde{A} = \begin{pmatrix} c & b^T \\ b & A \end{pmatrix}$ $\quad$ $Q | E$ vynásobíme $R^T Q R | R^T E$

  $\tilde{A}$ REG = REGULÁRNÍ
  A REG = STŘEDOVÁ

  PŘEPOČET $\hat{c} = c - b^T A^{-1} b$
  DÉLKY POLOOS $a_i = \sqrt{\frac{|\hat{c}|}{\lambda_i}}$

[REGULÁRNÍ QUAD $\operatorname{sign} A = (p, q, 0) \wedge \hat{c} = \frac{\det \tilde{A}}{\det A}$

RS • $(q = 0 \wedge \hat{c} < 0) \vee (p = 0 \wedge \hat{c} > 0)$ = ELIPSOID

RS • $(q = 0 \wedge \hat{c} > 0) \vee (p = 0 \wedge \hat{c} < 0)$ = PRÁZDNÁ MNOŽINA

RS • $(p \neq 0 \wedge q \neq 0)$ = HYPERBOLOID $\vee$ ($\hat{c} = 0$) $\to$ DUÁLNÍ

RNS • PARABOLOID $\quad \operatorname{sign} A = (1,1,1)$
→ HYPERBOLICKÝ $\quad \operatorname{sign} \tilde{A} = (2,2,0)$
→ ELIPTICKÝ $\quad \operatorname{sign} \tilde{A} = (3,1,0) \vee (1,3,0)$ $\quad \operatorname{sign} A = (2,0,1)$

- JORDANŮV TVAR ROZKL. $A = R J_\lambda R^{-1} = R(D+H)R^{-1}$
- $\operatorname{rank}(A^k) - \operatorname{rank}(A^{k+1})$ = počet buněk s dim $(k+1 \leq)$

$$J_{\lambda,k}^{3} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \lambda^3 & 3\lambda^2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^3 & \end{pmatrix}$$

$$\exp(J_{\lambda,3} \cdot t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp A = R \exp J_\lambda R^{-1}$$

- $\dot{y}(t) = Ax(t) \quad x(0) = c \to x(t) = \exp(At)\, c$

$\sigma_A \to \vec{v}_1 \;\; (A | \vec{v}_1) \to \vec{v}_2 \dots \to R = (\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots)$

KONTRAKCE TENSORU $C_2^1: T_3^1 \to T_2$ $\quad T \to T(-, -, -1, \vec{e}_i)$ KOVA KONTRA

- $e^i(e_j) = \delta_i^j$; $R = (e_1 | e_2)$; S_{ijk}^{l}, $i,j,k \in \{1,2\}$

$S_{121} = R_1^a R_2^b R_3^c S_{abc}$; $R^{-1} \to \begin{pmatrix} R_1^1 & R_2^1 \\ R_1^2 & R_2^2 \end{pmatrix}$ ↑ŘÁDEK ↓SLOUPEC $\quad$ TENSORKY

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$	$(3,1,0)$ $(3,0,0)$	ELIPSOID
$A + B - C + 1$	$(3,1,0)$ $(2,1,0)$	HYPERBOL. DVOJDÍL.
$A + B - C - 1$	$(2,2,0)$ $(2,1,0)$	H. JEDNODÍL.
$A - B$	$(1,1,2)$ $(1,1,1)$	RŮZNOBĚŽ. ROVINY
$A - 1$	$(1,1,2)$ $(1,0,2)$	ROVNOBĚŽ. ROVINY
V $\mathbb{R}^3$		
$A + B - 1$	$(2,1,0)$ $(2,0,0)$	ELIPSA
$A - B - 1$	$(2,1,0)$ $(1,1,0)$	HYPERBOLE
$x^2 - 2y$	$(2,1,0)$ $(1,0,1)$	PARABOLE
	$(1,1,1)$ $(1,1,0)$	RŮZNOBĚŽKY
V $\mathbb{R}^2$	$(1,1,1)$ $(1,0,1)$	ROVNOBĚŽKY