Úloha 1. Rozhodněte, která z následujících tvrzení za daných předpokladů vždy platí. Za každou trojici, kterou celou správně určíte, získáváte 0, 5 bodu.

1. Nechť $A, B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. Pak
   (a) $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.
   (b) A a B jsou podobné, právě když se rovnají jejich charakteristické polynomy.
   (c) existují $a, b, c, d, p, q, r, s \in \mathbb{C}$ taková, že $aE_3 + bA + cA^2 + dA^3 = pE_3 + qB + rB^2 + sB^3$.
2. Je-li $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ lineárně nezávislá posloupnost prvků z $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem, $A := (\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3)$ a $Q = (\mathbf{q}_1|\mathbf{q}_2|\mathbf{q}_3)$ taková matice, že $A = QR$ je QR rozklad matice A, pak
   (a) $r_{33} > 0$
   (b) $r_{31} = 0$
   (c) $\mathbf{a}_2 = \mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T\mathbf{a}_2 + \mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T\mathbf{a}_2$
3. Je-li $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symetrická matice, pro kterou $\det A > 0$, pak kvadrika zadaná rovnicí
   $$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1$$
   (a) je nutně elipsoid.
   (b) je nutně středová.
   (c) je nutně regulární.
4. Je-li $A \in \mathbb{R}^{7\times 4}$ matice s lineárně nezávislými sloupci a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^7$, pak
   (a) $A^T A$ je regulární.
   (b) splňuje-li vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ rovnost $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$, pak splňuje i rovnost $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
   (c) patří Moore-Penroseova pseudoinverze matice A do vektorového prostoru $\mathbb{R}^{4\times 7}$

Úloha 2. Uvažujme kovektor $\alpha \in \mathbb{R}^2$ zadaný předpisem
$$\alpha\left(\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}\right) = 7x^1 - 2x^2$$
Pro vektor $\mathbf{x} = (1, 5)^T$ a kvadratickou formu Q_g určenou bilineární formou $g = \alpha \otimes \alpha$ spočtěte hodnotu $Q_g(\mathbf{x})$, včetně postupu.

Úloha 3. Následující neplatné tvrzení pozměňte a přepište celé znovu tak, aby platilo: „Je-li $(V, \langle,\rangle)$ unitární prostor, $B = (b_1, \dots, b_n)$, $B' = (b'_1, \dots, b'_n)$ jeho dvě báze, $U = [\mathrm{Id}]^B_{B'}$, pak $U^+U = E_n$.“ Uveďte konkrétní číselný protipříklad, proč tvrzení neplatí v původním znění.

Úloha 4. Formulujte větu o ortogonální diagonalizaci normálního operátoru. Ilustrujte na příkladě operátoru na $\mathbb{C}^2$, který je určen maticí
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$
a to včetně ověření normality.

Úloha 5. Formulujte definici skalárního součinu na komplexním vektorovém prostoru. Určete normu a ortogonální doplněk vektoru $\begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$ z $\mathbb{C}^2$ se standardním skalárním součinem.