Úloha 1. Rozhodněte, která z následujících tvrzení za daných předpokladů vždy platí. Za každou trojici, kterou celou správně určíte, získáváte 0, 5 bodu.

1. Nechť $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ je unitární matice. Pak
   (a) existuje unitární matice U taková, že U^+AU je diagonální.
   (b) jsou vlastní čísla matice A reálná.
   (c) je matice A normální.
2. Nechť $\mathbf{x}$ je nenulový prvek vektorového prostoru $\mathbb{C}^3$ se standardním skalárním součinem. Pak
   (a) $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$
   (b) $\dim(\langle \mathbf{x} \rangle^\perp) = 4$
   (c) existují vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ takové, že $(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ je ortogonální báze prostoru $\mathbb{C}^3$.
3. Uvažujme matici $A \in \mathbb{C}^{5\times 3}$ a její singulární rozklad $U\Sigma V^+$. Pak
   (a) $\Sigma \in \mathbb{C}^{3\times 3}$
   (b) $U^{-1} = U^+$
   (c) je matice V hermitovská.
4. Nechť $f : \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ je nenulová symetrická bilineární forma. Pak
   (a) pro každý nenulový $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$ je $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \neq 0$.
   (b) existuje $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5)$ báze prostoru $\mathbb{R}^5$ taková, že $f(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = 0$ pro $i \neq j$.
   (c) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^5 : f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{y}))$

Úloha 2. Formulujte definici trilineární formy a jejích souřadnic vzhledem k bázi. Uveďte vztah, který vyjadřuje, jak se tyto souřadnice mění při změně báze.

Úloha 3. Následující neplatné tvrzení pozměňte a přepište celé znovu tak, aby platilo: „Je-li $(V, \langle , \rangle)$ unitární prostor, (b_1, b_2, b_3) ortonormální posloupnost v něm, U její lineární obal, $v \in V$ a u vektor z V definovaný předpisem

$$u := \langle b_1, v \rangle b_1 + \langle b_2, v \rangle b_2 + \langle b_3, v \rangle b_3,$$

pak pro každý prvek $w \in U$ platí, že $\|u - w\| \leq \|u - v\|$, přičemž rovnost nastává právě když $v = w$." Uveďte konkrétní číselný protipříklad, proč tvrzení neplatí v původním znění.

Úloha 4. Formulujte větu o řešení homogenní soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Ilustrujte její použití na příkladě soustavy

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 \end{aligned}$$

Úloha 5. Doplňte za tečky nějaká čísla tak, aby rovnice

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

byla rovnicí

1. hyperbolického paraboloidu.
2. dvojdílného hyperboloidu.