Úloha 1. Rozhodněte, která z následujících tvrzení za daných předpokladů vždy platí. Za každou trojici, kterou celou správně určíte, získáváte $0,5$ bodu.

1. Nechť $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ je hermitovská matice. Pak
   (a) existuje unitární matice U taková, že U^+AU je diagonální.
   (b) jsou vlastní čísla matice A reálná.
   (c) je matice A unitární.
2. Nechť $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ je antisymetrická matice. Pak
   (a) $\exp A$ je antisymetrická matice.
   (b) $\exp A$ je ortogonální matice.
   (c) determinant matice $\exp A$ je roven jedné.
3. Uvažujme operátor $\mathbb{A} : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^3$. Pak
   (a) $\operatorname{Ker} \mathbb{A}^* = \operatorname{Im} \mathbb{A}$
   (b) $\operatorname{rank}(\mathbb{A}) = \operatorname{rank}(\mathbb{A}^*\mathbb{A})$
   (c) Je-li $v \in \mathbb{C}^3$, pak $\mathbb{A}^*v \in \mathbb{C}^5$.
4. Na prostoru $\mathbb{R}^2$ uvažujme kvadratickou formu $Q((x,y)^T) = 2x^2 - y^2$. Pak
   (a) Q je regulární.
   (b) Q je pozitivně semidefinitní.
   (c) Nulová množina kvadratické formy Q obsahuje více než jeden prvek $\mathbb{R}^2$.

Úloha 2. Formulujte definici duální báze. Označme kanonickou bázi v $\mathbb{R}^2$ jako $K = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. K bázi $B^* = (\varepsilon^1 + 2\varepsilon^2, 3\varepsilon^1 + 4\varepsilon^2)$ prostoru $(\mathbb{R}^2)^*$ najděte bázi B prostoru $\mathbb{R}^2$ k ní duální.

Úloha 3. Následující neplatné tvrzení pozměňte a přepište celé znovu tak, aby platilo: „Je-li $(V, \langle,\rangle)$ komplexní unitární prostor konečné dimenze, C jeho ortogonální báze, $u, v \in V$ a $\mathbf{x} = [u]^C$, $\mathbf{y} = [v]^C$, pak $\langle u, v\rangle = \mathbf{y}^+\mathbf{x}$.“ Uveďte protipříklad, proč tvrzení neplatí v původním znění.

Úloha 4. Formulujte Cayley-Hamiltonovu větu a ověřte její platnost pro matice 2×2.

Úloha 5. Napište vztah pro matici ortogonální projekce na podprostor $W = \langle (1,1,1)^T, (1,0,0)^T \rangle$ v prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem, a to

1. vzhledem ke kanonické bázi
2. vzhledem k bázi $((1,1,1)^T, (1,0,0)^T, (0,1,-1)^T)$.