Úloha 1. Rozhodněte, která z následujících tvrzení za daných předpokladů vždy platí. Za každou trojici, kterou celou správně určíte, získáváte 0, 5 bodu.

1. Ve vektorovém prostoru $V = \mathbb{C}^8$ se standardním skalárním součinem uvažujme podprostor W, zobrazení $P_W : V \to V$ ortogonální projekce na tento podprostor a matici $A := [P_W]^K_K$ tohoto zobrazení vzhledem ke kanonické bázi.
   (a) Matice A je hermitovská.
   (b) Vlastní čísla matice A leží na jednotkové kružnici v komplexní rovině.
   (c) Pro každý $\mathbf{x} \in V$ platí, že $\|P_W(\mathbf{x})\| < \|\mathbf{x}\|$.
2. Uvažujme Jordanovu buňku $J_{0,3}$ řádu 3 s vlastním číslem 0.
   (a) $\exp(J_{0,3})$ je Jordanova buňka.
   (b) $\exp(J_{0,3})$ je regulární matice.
   (c) $\exp(-J_{0,3}) = -\exp(J_{0,3})$
3. Uvažujme operátor $\mathbb{A} : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$. Pro jeho modul $|\mathbb{A}|$ platí, že
   (a) je součástí polárního rozkladu operátoru $\mathbb{A}$.
   (b) je pozitivně definitním operátorem.
   (c) jeho vlastní čísla jsou absolutními hodnotami vlastních čísel operátoru $\mathbb{A}$.
4. Uvažujme tři kovektory $\alpha, \beta, \gamma \in (\mathbb{R}^2)^*$. Pak
   (a) $\alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$
   (b) $(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma = \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)$
   (c) $\alpha \otimes \alpha$ je bilineární forma

Úloha 2. Napište definici unitární matice a uveďte alespoň čtyři další podmínky, které jsou s touto definicí ekvivalentní.

Úloha 3. Následující neplatné tvrzení pozměňte a přepište celé znovu tak, aby platilo: „Je-li $A, B, C \in \mathbb{C}^{5\times5}$ trojice matic, pak existuje regulární matice $R \in \mathbb{C}^{5\times5}$ taková, že matice RAR^{-1}, RBR^{-1}, RCR^{-1} jsou diagonální, právě když $ABC = CBA$“. Uveďte protipříklad, proč tvrzení neplatí v původním znění.

Úloha 4. Formulujte větu o QR-rozkladu matice.

Úloha 5. Uvažujme kvadratickou formu $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Jak vypadá geometricky množina všech $\mathbf{x}$, pro které $Q(\mathbf{x}) = 1$, pokud je signatura Q rovna

1. $(2, 1, 0)$?
2. $(1, 0, 2)$?