Úloha 1. Rozhodněte, která z následujících tvrzení za daných předpokladů vždy platí. Za každou trojici, kterou celou správně určíte, získáváte $0,5$ bodu.

1. Nechť $A \in \mathbb{R}^{3\times 5}$ je matice s lineárně nezávislými řádky. Pak její Moore-Penroseova pseudoinverze je
   (a) $A^\dagger = (A^TA)^{-1}A^T$.
   (b) $A^\dagger = A^T(AA^T)^{-1}$.
   (c) $A^\dagger = A(A^TA)^{-1}$.

2. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{C}^2$ se standardním skalárním součinem uvažujme bázi
   $$B = (v_1, v_2) \equiv \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right)$$
   .
   (a) Báze B je ortogonální.
   (b) Matice přechodu od báze B do kanonické báze je unitární.
   (c) Pro každý vektor $u \in \mathbb{C}^2$ platí, že $[u]^B = \begin{pmatrix} \langle v_1, u\rangle \\ \langle v_2, u\rangle \end{pmatrix}$.

3. Uvažujme matici A, jejíž spektrum je $\{\mu, \lambda\}$ a Jordanův tvar je $\mathrm{diag}(J_{\mu,5}, J_{\mu,4}, J_{\lambda,3})$. Pak
   (a) geometrická násobnost vlastního čísla μ je rovna 2.
   (b) algebraická násobnost vlastního čísla λ je rovna 3.
   (c) dimenze zobecněného vlastního podprostoru matice A příslušného vlastnímu číslu μ je rovna 5.

4. Uvažujme symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ se signaturou $(0, 2, 0)$ a dále $c \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Kvadrika s rovnicí $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0$ je
   (a) elipsa.
   (b) regulární.
   (c) středová.

Úloha 2. Napište definici úplné antisymetrizace tenzoru typu $(0, 3)$.

Úloha 3. Následující neplatné tvrzení pozměňte a přepište tak, aby platilo: „Je-li $(V, \langle , \rangle)$ unitární prostor nad $\mathbb{C}$ konečné dimenze a $\mathbb{B} : V \to V$ operátor na něm, pak existuje ortonormální báze C ve V taková, že $[\mathbb{B}]^C_C$ je diagonální matice“. Uveďte protipříklad, proč tvrzení neplatí v původním znění.

Úloha 4. Formulujte větu označovanou jako Sylvesterův zákon setrvačnosti kvadratických forem.

Úloha 5. Na vektorovém prostoru $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$ uvažujme nějaký skalární součin. Označme W podprostor všech symetrických matic ve V a $P_W : V \to V$ ortogonální projekci na tento podprostor. Jaká je dimenze jádra zobrazení P_W a proč?