Úloha 1. Rozhodněte, která z následujících tvrzení za daných předpokladů vždy platí. Za každou trojici, kterou celou správně určíte, získáváte $0,5$ bodu.

1. Nechť $A \in \mathbb{C}^{7\times 4}$ má lineárně nezávislé sloupce a QR-rozklad $A = QR$. Pak
   (a) Matice QQ^+ je matice ortogonální projekce na $\operatorname{Im} A$ vzhledem ke kanonické bázi (a standardnímu skalárnímu součinu na $\mathbb{C}^7$).
   (b) Matice Q^+Q je jednotková.
   (c) Třetí sloupec matice A je v lineárním obalu prvních tří sloupců matice Q.
2. Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ jsou regulární matice. Pak
   (a) $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$
   (b) $\exp(A - B)$ je regulární
   (c) $\exp(R^TAR) = R^T \exp(A)R$
3. Nechť $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Pak
   (a) je matice A^TA pozitivně definitní.
   (b) má matice A^TA vlastní čísla na jednotkové kružnici v $\mathbb{C}$.
   (c) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^TA$
4. Na $\mathbb{R}^3$ uvažujme kvadratickou formu Q se signaturou $(1, 1, 1)$. Pak
   (a) nulová množina kvadratické formy Q je podprostor v $\mathbb{R}^3$.
   (b) je Q regulární kvadratická forma.
   (c) existuje polární báze B kvadratické formy Q taková, že stopa matice Q vzhledem k bázi B je rovna nule.

Úloha 2. Napište definici zobrazení zdvižení indexu (včetně vysvětlení pojmů v ní použitých).

Úloha 3. Následující neplatné tvrzení pozměňte tak, aby platilo: „Je-li g regulární symetrická bilineární forma na $\mathbb{R}^8$, G její matice vzhledem k bázi B a G_j podmatice G vzniklá vyškrtnutím posledních $8 - j$ řádků a sloupců, pak signatura g je $(p, q, 0)$, kde p je počet znaménkových změn v posloupnosti $(\det G_1, \det G_2, \dots, \det G_8)$“. Uveďte protipříklad, proč tvrzení neplatí v původním znění.

Úloha 4. Formulujte definici Moore-Penroseovy pseudoinverzní matice a větu, která tuto matici dává do souvislosti s aproximativním řešením soustav lineárních rovnic.

Úloha 5. Uvažujme matici $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, která má vlastní číslo 3, hodnost matice $(A - 3E)^5$ je 7 a hodnost matice $(A - 3E)^6$ je 5. Co se z toho dá vyvodit o Jordanově tvaru matice A?