Poznámka 1. V úlohách 1 a 5 a druhé části úlohy 2 stačí na plný počet bodů pouze správné odpovědi bez zdůvodnění. Zde v řešeních zdůvodnění uvádíme čistě pro lepší pochopitelnost.

Úloha 1. Rozhodněte, která z následujících tvrzení za daných předpokladů vždy platí. Za každou trojici, kterou celou správně určíte, získáváte $0,5$ bodu.

1. Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{4\times4}$ jsou dvě regulární matice. Pak
   (a) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$
   (b) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
   (c) $ABAB = A^2B^2$
2. Nechť $A \in \mathbb{R}^{3\times5}$, $B \in \mathbb{R}^{5\times4}$. Pak
   (a) Posloupnost sloupců matice AB je lineárně závislá.
   (b) Posloupnost řádků matice AB je lineárně nezávislá.
   (c) Hodnost matice AB je nejvýše 3.
3. Nechť $A \in \mathbb{R}^{7\times4}$ a B vznikne z A jednou elementární sloupcovou úpravou. Pak
   (a) Jádra matic A a B se rovnají.
   (b) Sloupcové prostory matic A a B se rovnají.
   (c) Řádkové prostory matic A a B se rovnají.
4. Nechť $A \in \mathbb{R}^{5\times2}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$ a mezi řešeními soustavy lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ jsou vektory $(1,1)^T$ a $(2,7)^T$. Pak
   (a) Vektor $\mathbf{x} = (1,6)^T$ je řešením homogenní soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$.
   (b) Vektor $\mathbf{x} = (2,2)^T$ je řešením soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
   (c) Vektor $\mathbf{x} = (3,13)^T$ je řešením soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Řešení. a) NNN: Matice $A+B$ ani nemusí být regulární; platí $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$, tedy stejně jako třetí bod by platilo pouze pokud by $AB = BA$, ale matice obecně nekomutují.

b) ANA: Matice AB je typu 3×4, sloupce jsou tedy čtyřprvková posloupnost prvků $\mathbb{R}^3$ a ta už musí být lineárně závislá. Posloupnost řádků lineárně nezávislá být nemusí, např. pro A i B nulové matice. Hodnost matice se rovná dimenzi sloupcového prostoru a ten je v případě AB podprostorem $\mathbb{R}^3$, nemůže mít tedy dimenzi větší než 3.

c) NAN: Při sloupcových úpravách se jádro i řádkový prostor obecně změní, stačí si představit matici s jediným nenulovým sloupcem a sloupcovou úpravu, která ho vymění s některým z ostatních nulových sloupců. Sloupcový prostor se sloupcovými úpravami zachovává.

d) ANA: Rozdíl dvou řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je řešením soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Dvojnásobek řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je řešením soustavy $A\mathbf{x} = 2\mathbf{b}$. Prvek přímky spojující dvě řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je řešením stejné soustavy, protože se dá napsat jako součet řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a řešení $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ (neboli prvku jádra matice A).

Úloha 2. Napište přesnou a úplnou definici pojmu podprostor vektorového prostoru. Pro následující podmnožiny v $\mathbb{R}^3$ rozhodněte, zda se jedná o podprostory:

1. $(1,2,3)^T + \langle (1,1,1)^T, (0,1,2)^T \rangle$
2. $\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y\}$
3. $\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 5z = 1\}$

4. $\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \geq 0\}$

Řešení. Definice může znít třeba takto: „Každá neprázdná množina W vektorového prostoru V nad $\mathbb{F}$ je podprostorem V, pakliže pro každé dva vektory u, v z W a každé dva skaláry r, s z $\mathbb{F}$ je $ru + sv$ prvkem W." První množina podprostorem je, protože vektor $(1,2,3)^T$ patří do $\langle (1,1,1)^T, (0,1,2)^T \rangle$ a množina je tedy rovna lineárnímu obalu. Druhá z množin je podprostorem také, je to vlastně jádro matice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Třetí množina neobsahuje nulový vektor, tedy nemůže být podprostorem. Čtvrtá množina není uzavřená na násobení skalárem -1, takže také není podprostorem.

Úloha 3. Následující neplatné tvrzení pozměňte a přepište celé znovu tak, aby platilo: „Každou konečnou posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ prvků vektorového prostoru V konečné dimenze lze doplnit na bázi V." Uveďte konkrétní číselný protipříklad, proč tvrzení neplatí v původním znění.

Řešení. „Každou lineárně nezávislou posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ prvků vektorového prostoru V konečné dimenze lze doplnit na bázi V." Jako protipříklad stačí vzít např. jednočlennou posloupnost $((0,0)^T)$, obsahující nulový vektor ve $\mathbb{R}^2$, tu na bázi celého $\mathbb{R}^2$ doplnit nelze, protože každá doplněná posloupnost bude lineárně závislá.

Úloha 4. Formulujte větu o dimenzi jádra a obrazu matice včetně všech předpokladů. Ilustrujte ji na příkladě matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Řešení. Věta se dá např. naformulovat takto: „Pro každou matici A s n sloupci je součet dimenze jejího jádra a dimenze jejího obrazu roven n". Jádro zadané matice je $\langle (1,0,0,0)^T, (0,-2,1,0)^T, (0,-3,0,1)^T \rangle$, obraz $\langle (1,2) \rangle$, součet dimenzí je tedy 4, což je skutečně počet sloupců matice.

Úloha 5. Najděte nějaké matice $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, které nejsou diagonální (speciálně tedy žádná z nich není rovna jednotkové nebo nulové matici) a vyhovují následujícím podmínkám:

1. $A^2 = 0$.
2. $B^2 = E$. (jednotková matice)
3. $C^2 = C$.

Řešení. Například $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Matici B můžeme hledat jako matici nějaké osové souměrnosti, matici C jako matici projekce. U A víme, že její hodnost musí být 1 a každý řádek kolmý na každý sloupec.