Úloha 1. Rozhodněte, která z následujících tvrzení za daných předpokladů vždy platí. Za každou trojici, kterou celou správně určíte, získáváte $0,5$ bodu.

1. Nechť $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ je posloupnost prvků vektorového prostoru V.
   (a) Je-li $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ lineárně závislá, pak je i $(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ lineárně závislá.
   (b) Pokud $(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ generuje V, pak i $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ generuje V.
   (c) Je-li dimenze V menší nebo rovna k, pak lze z $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ vybrat podposloupnost, která je bází V.
2. Je-li $A \in \mathbb{R}^{3\times 5}$ a $B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ regulární, pak
   (a) $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(A)$
   (b) $\operatorname{Ker}(AB) = \operatorname{Ker}(A)$
   (c) $\operatorname{rank}(AB) \le 3$
3. Nechť $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ má vlastní číslo 2 s vlastním vektorem $\mathbf{u}$, vlastní číslo 3 s vlastním vektorem $\mathbf{v}$ a vlastní číslo 5 s vlastním vektorem $\mathbf{w}$.
   (a) Posloupnost $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ je báze prostoru $\mathbb{C}^3$.
   (b) Matice $(\mathbf{u}|\mathbf{v}|\mathbf{w})^{-1} A\, (\mathbf{u}|\mathbf{v}|\mathbf{w})$ je diagonální.
   (c) $\det A = 10$.
4. Uvažujme matici $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ a touto maticí určené zobrazení $f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, jehož předpis je $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.
   (a) Má-li A nulové jádro, pak existuje vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ takový, že soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má právě jedno řešení.
   (b) Existuje-li vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ takový, že soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má alespoň jedno řešení, pak je zobrazení f_A na.
   (c) Je-li zobrazení f_A prosté, pak pro každý vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ platí, že $\mathbf{b} \in \operatorname{Im} A$.

Úloha 2. Formulujte definici matice přechodu. Existuje k ní vždy matice inverzní? Pokud ano, čemu se rovná?

Úloha 3. Následující neplatné tvrzení pozměňte tak, aby platilo: „Jsou-li U, W dva podprostory $\mathbb{R}^n$, množina B je báze U a množina C je báze W. Pak jejich sjednocení $B \cup C$ je bází součtu $U + W$ těchto podprostorů.“ Uveďte protipříklad, proč tvrzení neplatí v původním znění.

Úloha 4. Formulujte větu o Laplaceově rozvoji podle sloupce. Aplikujte ji na výpočet determinantu

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 & d \\ e & 0 & g & 0 & h \\ w & j & k & m & x \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ r & 0 & t & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Úloha 5. Najděte matice $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, které nejsou diagonální (speciálně tedy žádná z nich není rovna jednotkové nebo nulové matici) a vyhovují následujícím podmínkám:

1. $A^2 = 0$.
2. $B^2 = E$. (jednotková matice)
3. $C^2 = C$.