*Úloha* 1. Rozhodněte, která z následujících tvrzení za daných předpokladů vždy platí. Za každou trojici, kterou celou správně určíte, získáváte $0,5$ bodu.

1. Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, pak
   (a) $\operatorname{Im} AB \leq \operatorname{Im} B$.
   (b) $\operatorname{Im} AB \leq \operatorname{Im} A$.
   (c) $\operatorname{Ker} AB \geq \operatorname{Ker} B$.
2. Je-li $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ regulární a zapsaná jako součin elementárních matic $A = E_1E_2E_3$, pak
   (a) $A^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}$
   (b) $A^T = E_3^TE_2^TE_1^T$
   (c) $A^{-1} = ((A^T)^{-1})^T$
3. Nechť $f : \mathbb{R}^{2\times 4} \to \mathbb{R}^5$ je lineární zobrazení. Pak
   (a) $\dim \operatorname{Im} f = 5$.
   (b) je-li $\dim \operatorname{Ker} f = 3$, je $f$ epimorfismus.
   (c) $f$ nemůže být monomorfismus.
4. Je-li $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ matice, pro kterou $\det(A) = 2$, pak
   (a) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{8}$.
   (b) $\det(A^T) = 2$.
   (c) $\det(2A) = 8$.

*Úloha* 2. Formulujte definice algebraické a geometrické násobnosti vlastního čísla matice. Určete algebraickou a geometrickou násobnost vlastních čísel matice

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Úloha* 3. Následující neplatné tvrzení pozměňte tak, aby platilo: „Je-li $Q = (\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_k)$ lineárně nezávislá posloupnost ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ a $P = \{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ množina generátorů $\mathbb{R}^n$, pak je posloupnost $(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_k, \mathbf{p}_{k+1}, \ldots, \mathbf{p}_n)$ bází prostoru $\mathbb{R}^n$. “ Uveďte protipříklad, proč tvrzení neplatí v původním znění.

*Úloha* 4. Formulujte tvrzení, které udává transformační formuli pro matici reprezentující lineární zobrazení vzhledem k různým bázím. Ilustrujte na příkladě zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které je zadané předpisem

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2y \\ x - y \end{pmatrix},$$

bázi $C = ((1,2)^T, (1,3)^T)$ a maticích $[f]_{K_2}^C$ a $[f]_{K_2}^{K_2}$.

*Úloha* 5. U uvedených podmnožin rozhodněte, zda jsou to podprostory, a pokud ano, určete jejich dimenzi:

1. Podmnožina $\mathbf{x}^\perp$ v $\mathbb{R}^3$, kde $\mathbf{x}$ je nenulový vektor.
2. Podmnožina všech polynomů splňujících $p(0) = 1$ v prostoru $P^4(x, \mathbb{R})$.
3. Podmnožina všech polynomů splňujících $p(1) = 0$ v prostoru $P^4(x, \mathbb{R})$.
4. Podmnožina všech antisymetrických matic v $\mathbb{R}^{2\times 2}$.