Úloha 1. Rozhodněte, která z následujících tvrzení za daných předpokladů vždy platí. Za každou trojici, kterou celou správně určíte, získáváte 0, 5 bodu.

1. Existují dva vzájemně různé podprostory v $\mathbb{R}^5$ takové, že dimenze každého z nich je 3 a dimenze jejich průniku je
   (a) 0.
   (b) 1.
   (c) 3.
2. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^6$ uvažujme nenulový vektor $\mathbf{a}$ a lineárně nezávislou posloupnost $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_5, \mathbf{c}_6)$.
   (a) Posloupnost $(\mathbf{a}, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_5, \mathbf{c}_6)$ generuje $\mathbb{R}^6$.
   (b) Vektor $\mathbf{a}$ je možné vyjádřit jako lineární kombinaci prvků posloupnosti $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_5, \mathbf{c}_6)$ alespoň jedním způsobem.
   (c) Posloupnost $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_6)$ je lineárně nezávislá.
3. Determinant matice $(\mathbf{y}_1|\mathbf{y}_2|\mathbf{y}_3|\mathbf{y}_4) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ je roven determinantu matice
   (a) $(\mathbf{y}_1|\mathbf{y}_2 + 5\mathbf{y}_4|\mathbf{y}_3|\mathbf{y}_4)$.
   (b) $(\mathbf{y}_1|5\mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_4|\mathbf{y}_3|\mathbf{y}_4)$.
   (c) $(\mathbf{y}_4|\mathbf{y}_1|\mathbf{y}_2|\mathbf{y}_3)$.
4. Je-li $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^7$ vlastním vektorem matice $A \in \mathbb{C}^{7\times 7}$ příslušným vlastnímu číslu λ, pak
   (a) je $\mathbf{v}$ vlastním vektorem matice A^T příslušným vlastnímu číslu λ.
   (b) je $\mathbf{v}$ vlastním vektorem matice A^2 příslušným vlastnímu číslu λ^2.
   (c) má jádro matice $A - \lambda E$ nenulovou dimenzi. ($E \in \mathbb{C}^{7\times 7}$ je jednotková matice.)

Úloha 2. Formulujte nutnou a zároveň postačující podmínku, aby lineární zobrazení bylo monomorfismus. Je monomorfismem zobrazení $P_{\mathbf{x}^\perp} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které přiřazuje vektoru jeho kolmý průmět na ortogonální doplněk nenulového vektoru $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^3$?

Úloha 3. Následující neplatné tvrzení pozměňte tak, aby platilo: „Je-li $A \in \mathbb{R}^{3\times 5}$ a $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, pak se sloupcové prostory matic A a QA rovnají.“ Uveďte protipříklad, proč tvrzení neplatí v původním znění.

Úloha 4. Napište definici matice, která je reprezentací lineárního zobrazení vůči nějakým bázím. Spočítejte tuto matici pro zobrazení $g : P^2(x, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ určené předpisem

$$g(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a+c & a-b \\ -b & 2b \end{pmatrix}$$

vůči nějakým vámi zvoleným bázím.

Úloha 5. Formulujte Frobeniovu větu. Najděte vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, pro který soustava

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

nemá řešení.