Úloha 1. Rozhodněte, která z následujících tvrzení za daných předpokladů vždy platí. Za každou trojici, kterou celou správně určíte, získáváte $0,5$ bodu.

1. Pro každou soustavu lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ platí
   (a) Pokud má soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ více než jedno řešení, pak je posloupnost sloupců matice A lineárně závislá.
   (b) Pokud je posloupnost sloupců matice A lineárně nezávislá, pak má soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě jedno řešení.
   (c) Hodnost matice A je menší nebo rovna hodnosti matice $(A|\mathbf{b})$.
2. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{C}^7$ platí:
   (a) Každá jeho množina generátorů obsahuje alespoň 7 prvků.
   (b) Každá jeho podmnožina o 7 prvcích je jeho množinou generátorů.
   (c) Každá posloupnost 8 vektorů je lineárně závislá.
3. Jsou-li A, B regulární reálné 5×5 matice, které z následujících matic jsou vždy také regulární?
   (a) $A^{-1}B$
   (b) $A + B$
   (c) B^TABA^T
4. Jsou-li $\pi, \rho \in S_{55}$ dvě permutace, pak
   (a) $\rho = \pi^{-1} \circ \rho \circ \pi$
   (b) $\mathrm{sgn}(\rho \circ \pi) = \mathrm{sgn}(\pi^{-1} \circ \rho)$
   (c) π je lichá.

Řešení. 1. ANA, 2. ANA, 3. ANA, 4. NAN

Úloha 2. Nechť V je vektorový prostor, B, C jeho báze a $f : V \to V$ lineární zobrazení. Jaký je vztah mezi determinanty matice $[f]_B^B$ a matice $[f]_C^C$? Ilustrujte konkrétně na případu, kdy

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Řešení.

$$[f]_C^C = [\mathrm{Id}]_B^C [f]_B^B [\mathrm{Id}]_C^B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Determinanty obou matic jsou -2.

Úloha 3. Následující neplatné tvrzení pozměňte tak, aby platilo: Nechť V, U jsou dva vektorové prostory nad $\mathbb{R}$ konečné dimenze, $f : V \to U$ lineární zobrazení. Pak je-li f monomorfismus, existuje báze P prostoru V a báze Q prostoru U takové, že matice $[f]_P^Q$ je regulární.

Řešení. Nechť V, U jsou dva vektorové prostory nad $\mathbb{R}$ konečné dimenze, $f : V \to U$ lineární zobrazení. Pak je-li f izomorfismus, existuje báze P prostoru V a báze Q prostoru U takové, že matice $[f]_P^Q$ je regulární.

Úloha 4. Napište definici charakteristického polynomu matice. Jakou vlastnost má matice, jejíž charakteristický polynom má nulový absolutní člen? Stručně zdůvodněte.

Řešení. $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, absolutní člen je $\det A$, tedy taková matice je singulární.

Úloha 5. Formulujte větu o dimenzi součtu a průniku. Jakých hodnot podle ní může nabývat dimenze průniku podprostoru dimenze 5 a podprostoru dimenze 7 ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^{2\times 5}$?

Řešení. Protože $\dim \mathbb{R}^{2\times 5} = 10$, je dimenze průniku alespoň $5 + 7 - 10 = 2$. Maximální dimenze je 5, pokud je jeden podprostor podmnožinou druhého. Možné hodnoty jsou tedy $2, 3, 4, 5$.