

Úloha 1. Rozhodněte, která z následujících tvrzení za daných předpokladů vždy platí. Za každou trojici, kterou celou správně určíte, získáváte 0, 5 bodu.

1. Pro každou soustavu lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ platí
 - (a) Pokud má soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ více než jedno řešení, pak je posloupnost sloupců matice A lineárně závislá.
 - (b) Pokud je posloupnost sloupců matice A lineárně nezávislá, pak má soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě jedno řešení.
 - (c) Hodnost matice A je menší nebo rovna hodnosti matice $(A|\mathbf{b})$.
2. Ve vektorovém prostoru \mathbb{C}^7 platí:
 - (a) Každá jeho množina generátorů obsahuje alespoň 7 prvků.
 - (b) Každá jeho podmnožina o 7 prvcích je jeho množinou generátorů.
 - (c) Každá posloupnost 8 vektorů je lineárně závislá.
3. Jsou-li A, B regulární reálné 5×5 matice, které z následujících matic jsou vždy také regulární?
 - (a) $A^{-1}B$
 - (b) $A + B$
 - (c) $B^T A B A^T$
4. Jsou-li $\pi, \rho \in S_{55}$ dvě permutace, pak
 - (a) $\rho = \pi^{-1} \circ \rho \circ \pi$
 - (b) $\text{sgn}(\rho \circ \pi) = \text{sgn}(\pi^{-1} \circ \rho)$
 - (c) π je lichá.

Úloha 2. Nechť V je vektorový prostor, B, C jeho báze a $f : V \rightarrow V$ lineární zobrazení. Jaký je vztah mezi determinanty matice $[f]_B^B$ a matice $[f]_C^C$? Ilustrujte konkrétně na případu, kdy

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Úloha 3. Následující neplatné tvrzení pozměňte tak, aby platilo: Nechť V, U jsou dva vektorové prostory nad \mathbb{R} konečné dimenze, $f : V \rightarrow U$ lineární zobrazení. Pak je-li f monomorfismus, existuje báze P prostoru V a báze Q prostoru U takové, že matice $[f]_P^Q$ je regulární.

Úloha 4. Napište definici charakteristického polynomu matice. Jakou vlastnost má matice, jejíž charakteristický polynom má nulový absolutní člen? Stručně zdůvodněte.

Úloha 5. Formulujte větu o dimenzi součtu a průniku. Jakých hodnot podle ní může nabývat dimenze průniku podprostoru dimenze 5 a podprostoru dimenze 7 ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^{2 \times 5}$?