Úloha 1. Rozhodněte, která z následujících tvrzení za daných předpokladů vždy platí. Za každou trojici, kterou celou správně určíte, získáváte $0,5$ bodu.

1. Nechť $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$, jejíž jádro má dimenzi 2. Pak
   (a) hodnost matice A je 3.
   (b) $\dim(\operatorname{Ker} A^T) = 1$.
   (c) $\dim(\operatorname{Im} A) = 2$.
2. Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{6\times 6}$. Pak
   (a) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
   (b) $\det(AB) = \det(BA)$
   (c) $\det(-A) = -\det(A)$
3. Jsou-li V, W dva reálné vektorové prostory konečné dimenze, B báze V, C báze W, $f : V \to W$ lineární zobrazení a $v \in V$
   (a) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}[f]_B^C$
   (b) $[f]_B^C[v]^B = [v]^C$
   (c) $\operatorname{rank} f = \operatorname{Im}[f]_B^C$
4. Je-li $(v_1, \dots, v_k)$ lineárně nezávislá posloupnost ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^{4\times 4}$. Pak:
   (a) $k \leq 4$
   (b) Každý prvek $\mathbb{R}^{4\times 4}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci prvků $v_1, \dots, v_k$ nejvýše jedním způsobem.
   (c) Všechny prvky posloupnosti $(v_1, \dots, v_k)$ jsou regulární matice.

Řešení. a) AAN b) NAN c) NNN d) NAN

Úloha 2. Formulujte definici vlastního čísla a vlastního vektoru endomorfismu. Ilustrujte na příkladě rotace o obecný úhel α v rovině.

Řešení. $[R_\alpha]_{K_2}^{K_2} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ má vlastní čísla $\cos\alpha \pm i \sin\alpha$ a vlastní podprostory $\langle (1, \pm i)^T \rangle$.

Úloha 3. Následující neplatné tvrzení pozměňte tak, aby platilo: Jsou-li $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, pak je hodnost matice AB rovna menší z hodností matic A a B. Uveďte protipříklad, proč tvrzení neplatí v původním znění.

Řešení. Jsou-li $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, pak je hodnost matice AB menší nebo rovna než menší z hodností matic A a B. Protipříklad jsou třeba dvě nenulové matice, jejichž součin je nulová, např. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (0)$.

Úloha 4. O níže uvedených podmnožinách rozhodněte, zda jsou to podprostory příslušného vektorového prostoru, a každé rozhodnutí stručně zdůvodněte.

1. $\left\{ X \in \mathbb{R}^{3\times 2} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{3\times 2}$
2. $\{Y \in \mathbb{R}^{7\times 7} | \operatorname{Tr} Y = 0\} \subset \mathbb{R}^{7\times 7}$
3. $\left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \middle| x \geq 0, x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$
4. množina všech regulárních matic v $\mathbb{R}^{3\times 3}$

Řešení. 1. ne, je to prázdná množina (a i kdyby nebyla, neobsahuje nulovou matici), 2. ano, z vlastností stopy, 3. ne, není uzavřena na násobení skalárem -1., 4. ne, neobsahuje nulovou matici (=není uzavřena na násobení skalárem 0)

Úloha 5. Napište definici adjungované matice a formulujte tvrzení, které ji dává do souvislosti s maticí inverzní. Ilustrujte toto tvrzení na příkladu matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$