Úloha 1. Rozhodněte, která z následujících tvrzení za daných předpokladů vždy platí. Za každou trojici, kterou celou správně určíte, získáváte 0, 5 bodu.

1. Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ jsou dvě regulární matice. Pak
   (a) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$
   (b) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
   (c) $ABAB = A^2B^2$
2. Nechť $A \in \mathbb{R}^{3\times 5}$, $B \in \mathbb{R}^{5\times 4}$. Pak
   (a) Sloupce matice AB jsou lineárními kombinacemi sloupců matice B.
   (b) Sloupce matice AB jsou lineárními kombinacemi sloupců matice A.
   (c) Řádky matice AB jsou lineárními kombinacemi řádků matice B.
3. Uvažujme $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ takovou, že $\sigma(A) = \{1, 2, 3\}$. Pak
   (a) $\sigma(A^{-1}) = \{-1, -2, -3\}$
   (b) $\sigma(A^T) = \{1, 2, 3\}$
   (c) $\sigma(A^2) = \{2, 4, 6\}$
4. Nechť V je vektorový prostor dimenze n a $f : V \to V$ je prosté lineární zobrazení. Pak
   (a) f je momomorfismus.
   (b) f je epimorfismus.
   (c) f je izomorfismus.

Řešení. a) NNN b) NAA c) NAN d) AAA

Úloha 2. Formulujte definici matice přechodu. Jsou-li $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, $C = (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1)$ dvě báze prostoru $\mathbb{R}^3$, napište obě matice přechodu mezi nimi, správně je označte a pojmenujte. Napište vztah, který vyjadřuje, jak se pomocí matice přechodu transformují souřadnice vektoru.

Řešení. Matice přechodu od C k B je $[\mathrm{Id}]^C_B = ([\mathbf{v}_1]^C|[\mathbf{v}_2]^C|[\mathbf{v}_3]^C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Matice přechodu od B k C je $[\mathrm{Id}]^B_C = ([\mathbf{v}_2]^B|[\mathbf{v}_3]^B|[\mathbf{v}_1]^B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pro libovolný vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ platí $[\mathrm{Id}]^C_B[\mathbf{v}]^B = [\mathbf{v}]^C$.

Úloha 3. Následující neplatné tvrzení pozměňte tak, aby platilo: „Je-li $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ posloupnost vektorů z reálného vektorového prostoru U a $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ báze reálného vektorového prostoru V, pak existuje právě jedno lineární zobrazení $f : U \to V$ takové, že pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí $f(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$.“ Uveďte protipříklad, proč tvrzení neplatí v původním znění.

Řešení. Např. „Je-li $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ báze reálného vektorového prostoru U a $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ posloupnosti vektorů z reálného vektorového prostoru V, pak existuje právě jedno lineární zobrazení $f : U \to V$ takové, že pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí $f(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$.“. Protipříkladem by mohla být například posloupnost $((0, 0)^T, (0, 0)^T)$ a báze $((1, 0)^T, (0, 1)^T)$ v $\mathbb{R}^2$.

Úloha 4. Nechť $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ je matice. Formulujte alespoň 6 výroků, které jsou ekvivalentní výroku „A je regulární“.

Úloha 5. Formulujte tvrzení, které popisuje množinu řešení soustavy rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pomocí jádra. Ilustrujte na příkladu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Řešení. Množina řešení má tvar $(0, 1, 1)^T + \langle (1, 0, 0)^T, (0, -2, 1)^T \rangle$, tedy $\mathbf{x}_P + \mathrm{Ker}\, A$, kde $A\mathbf{x}_P = \mathbf{b}$.