Úloha 1. Rozhodněte, která z následujících tvrzení za daných předpokladů vždy platí. Za každou trojici, kterou celou správně určíte, získáváte $0,5$ bodu.

1. Nechť $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, pro niž $\det A = 3$. Pak
   (a) $\det(2A) = 6$
   (b) $\det(A^2) = 9$
   (c) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{3}$
2. Nechť $A \in \mathbb{R}^{3\times 5}$, $B \in \mathbb{R}^{5\times 4}$. Pak
   (a) Posloupnost sloupců matice AB je lineárně závislá.
   (b) Posloupnost řádků matice AB je lineárně nezávislá.
   (c) Hodnost matice AB je nejvýše 3.
3. Nechť $A \in \mathbb{R}^{7\times 4}$ a B vznikne z A jednou elementární sloupcovou úpravou. Pak
   (a) Jádra matic A a B se rovnají.
   (b) Sloupcové prostory matic A a B se rovnají.
   (c) Řádkové prostory matic A a B se rovnají.
4. Nechť $A \in \mathbb{R}^{5\times 2}$, $\mathbf{b} = \mathbb{R}^5$ a mezi řešeními soustavy lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ jsou vektory $(1,1)^T$ a $(2,7)^T$. Pak
   (a) Vektor $\mathbf{x} = (1,6)^T$ je řešením homogenní soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$.
   (b) Vektor $\mathbf{x} = (2,2)^T$ je řešením soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
   (c) Vektor $\mathbf{x} = (3,13)^T$ je řešením soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Řešení. a) NAA b) ANA c) NAN d) ANA

Úloha 2. Definujte pojem izomorfismu vektorových prostorů a z následujícího seznamu vyberte dvojice vektorových prostorů, mezi nimiž nějaký izomorfismus existuje: $\mathbb{R}^6, \mathrm{End}(\mathbb{R}^3), \mathbb{R}^{2\times 3}, P^6(x,\mathbb{R})$.

Řešení. $\mathbb{R}^6$ a $\mathbb{R}^{2\times 3}$ mají dimenzi 6, tedy jsou izomorfní, zbylé dva mají dimenzi 9, resp. 7.

Úloha 3. Následující neplatné tvrzení pozměňte tak, aby platilo: „Každou konečnou posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ prvků vektorového prostoru V konečné dimenze lze doplnit na bázi V." Uveďte protipříklad, proč tvrzení neplatí v původním znění.

Řešení. „Každou lineárně nezávislou posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ prvků vektorového prostoru V konečné dimenze lze doplnit na bázi V." Stačí vzít jednočlennou posloupnost obsahující nulový vektor, tu na bázi doplnit nelze.

Úloha 4. Formulujte větu o dimenzi jádra a obrazu včetně všech předpokladů. Ilustrujte ji na příkladě matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Řešení. Jádro je $\langle (1,0,0,0)^T, (0,-2,1,0)^T, (0,-3,0,1)^T \rangle$, obraz $\langle (1,2) \rangle$, součet dimenzí je tedy 4, což je počet sloupců matice.

Úloha 5. Matice $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ má stopu 10 a determinant 21. Jaká jsou její vlastní čísla? Odpověď zdůvodněte.

Řešení. Charakteristický polynom je tedy $\lambda^2 - 10\lambda + 21$, jeho kořeny 3 a 7.