

Úloha 1. Rozhodněte, která z následujících tvrzení za daných předpokladů vždy platí. Za každou trojici, kterou celou správně určíte, získáváte 0,5 bodu.

1. Nechť $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, pro niž $\det A = 3$. Pak
 - (a) $\det(2A) = 6$
 - (b) $\det(A^2) = 9$
 - (c) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{3}$
2. Nechť $A \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$, $B \in \mathbb{R}^{5 \times 4}$. Pak
 - (a) Posloupnost sloupců matice AB je lineárně závislá.
 - (b) Posloupnost řádků matice AB je lineárně nezávislá.
 - (c) Hodnota matice AB je nejvýše 3.
3. Nechť $A \in \mathbb{R}^{7 \times 4}$ a B vznikne z A jednou elementární sloupcovou úpravou. Pak
 - (a) Jádra matic A a B se rovnají.
 - (b) Sloupcové prostory matic A a B se rovnají.
 - (c) Řádkové prostory matic A a B se rovnají.
4. Nechť $A \in \mathbb{R}^{5 \times 2}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$ a mezi řešeními soustavy lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ jsou vektory $(1, 1)^T$ a $(2, 7)^T$. Pak
 - (a) Vektor $\mathbf{x} = (1, 6)^T$ je řešením homogenní soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
 - (b) Vektor $\mathbf{x} = (2, 2)^T$ je řešením soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
 - (c) Vektor $\mathbf{x} = (3, 13)^T$ je řešením soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Úloha 2. Definujte pojem izomorfismu vektorových prostorů a z následujícího seznamu vyberte dvojice vektorových prostorů, mezi nimiž nějaký izomorfismus existuje: \mathbb{R}^6 , $\text{End}(\mathbb{R}^3)$, $\mathbb{R}^{2 \times 3}$, $P^6(x, \mathbb{R})$.

Úloha 3. Následující neplatné tvrzení pozměňte tak, aby platilo: „Každou konečnou posloupnost $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ prvků vektorového prostoru V konečné dimenze lze doplnit na bázi V .“ Uveďte protipříklad, proč tvrzení neplatí v původním znění.

Úloha 4. Formulujte větu o dimenzi jádra a obrazu včetně všech předpokladů. Ilustrujte ji na příkladě matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Úloha 5. Matice $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ má stopu 10 a determinant 21. Jaká jsou její vlastní čísla? Odpověď zdůvodněte.