Řešení písemné práce z Klasické elektrodynamiky

Barbora Adamcová

Úloha 1

Uvažujte kouli (o poloměru a) v níž je na počátku celkový náboj Q sféricky symetricky rozmístěn tak, že

$$\rho(r) = A\, r^2,$$

kde A je konstant a r je sférická souřadnice udávající vzdálenost od středu koule. Materiál není úplně dokonalý izolant, takže všechen náboj časem skončí na povrchu koule. Postupuje podle následujícího návodu a určete energii, která se během migrace náboje přemění na teplo.

- Nalezněte hodnotu konstanty A.
- Spočtěte $\Delta\, r^4$.
- Na základě předchozího výsledku nalezněte řešení Poissonovy rovnice uvnitř i vně koule, zvolte $\Phi(\infty) = 0$.
- Nalezněte potenciál uvnitř i vně koule, který bude odpovídat situaci, kdy všechen náboj skončí na jejím povrchu.
- Nalezněte rozdíl energií obou konfigurací pole.

Řešení:

- Pro celkový náboj platí $Q = \int \rho dV$, kde $dV = 4\pi r^2 dr$, tedy $Q = 4\pi A a^5/5$ tedy $A = 5Q/(4\pi a^5)$.
- S použitím vzorečku $\Delta f(r) = (rf)''/r$ máme $\Delta\, r^4 = 5 \cdot 4\, r^2$
- Nejprve, sféricky symetrická řešení Laplaceovy rovnice $\Delta f = 0$ mají tvar $f = \alpha + \beta/r$, s ohledem na podmínku $\Phi(\infty) = 0$ tedy vně koule máme coulombické pole $4\pi\epsilon_0 \Phi^{(e)} = Q/r$. Na něj musíme navázat vnitřní řešení tak aby byl potenciál spojitý včetně první derivace. Pokud jsme v prvním bodě správně spočetli náboj, vyjde spojitost derivace automaticky a je třeba určit jedinou konstantu. Tak dostaneme

$$\Phi^{(i)} = -\frac{A}{4\epsilon_0}\left(\frac{r^4}{5} - a^4\right), \qquad \Phi^{(e)} = \frac{A}{\epsilon_0}\frac{a^5}{5}\frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}.$$

- Po přechodu náboje na povrch kuličky se vnější pole nezmění, zatímco uvnitř bude potenciál konstantní

$$\widetilde{\Phi}^{(i)} = \frac{A}{\epsilon_0}\frac{a^4}{5} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}$$

- Protože známe potenciál a náboj, použijeme vztah $W = \frac{1}{2}\int \Phi\rho dV$, tedy

$$W = \frac{1}{2}\int \Phi^{(i)}\rho\, dV = \frac{2\pi A^2}{5\cdot 4\,\epsilon_0}\int_0^a (r^4 - 5a^4) r^4 dr = \frac{4\pi A^2}{\epsilon_0}\frac{a^9}{5\cdot 9} = \frac{5}{9}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

  Konečné rozložení náboje má samozřejmě energii

$$\widetilde{W} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}, \qquad \text{tedy} \qquad W - \widetilde{W} = \frac{1}{9}\widetilde{W}.$$

Určete, pro kterou hodnotu parametru a je vektorové pole

$$\vec{U} = \left(2x^3 - ax^2y - axy^2 - ay^3\right)\vec{e}_x + \left(ax^3 + 4x^2y + ax^2y + axy^2 + 2y^3\right)\vec{e}_y$$

axiálně symetrické (vzhledem k otočením okolo osy z).
Řešení: Úlohu lze řešit mnoha způsoby. Nejpracnější, ale zcela obecný postup spočívá ve vyjádření pole za pomoci bázových vektorů ve válcových souřadnicích, tj dosazení

$$x = R\cos\phi\ , \qquad \vec{e}_x = \text{grad } x = \cos\phi\ \vec{e}_R - \sin\phi\ \vec{e}_\phi$$

$$y = R\sin\phi\ , \qquad \vec{e}_y = \text{grad } y = \sin\phi\ \vec{e}_R + \cos\phi\ \vec{e}_\phi$$

do výrazu pro pole $\vec{U}$. To proto, že složky axiálně symetrického vektorového pole vyjádřené ve válcových souřadnicích nemohou záviset na ϕ. Tak dostaneme

$$\vec{U} = R^3(2\vec{e}_R + \vec{e}_\phi(a + (2+a)\sin\phi\ \cos\phi\ ))$$

a tedy musí být $a = -2$.

Výpočet si lze o něco ulehčit tak, že nejprve spočteme

$$\operatorname{div}\vec{U} = (10+a)x^2 + (6-a)y^2 = R^2(8 + (2+a)\cos^2\phi)$$

a zjistíme, pro jakou hodnotu a jde o axiálně symetrické *skalární* pole, což je o dost jednodušší. Následně se výše uvedeným postupem ale stále musíme přesvědčit, že pro danou hodnotu a je $\vec{U}$ axiálně symetrické.

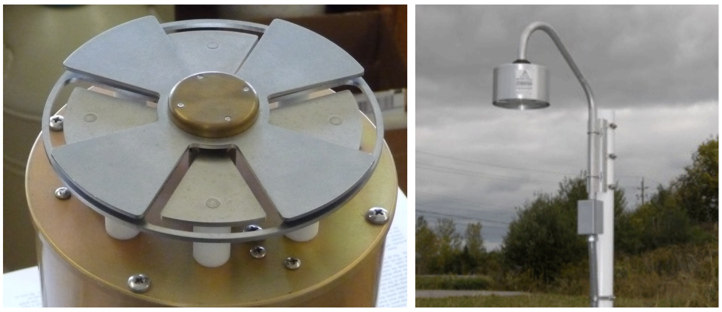
Někdy lze uhodnut a i otočením souřadnic o 90°, tedy nahrazením $x \to y, y \to -x, \vec{e}_x \to \vec{e}_y, \vec{e}_y \to -\vec{e}_x$. Je ovšem nutné se přesvědčit, že pro takto nalezené a je $\vec{U}$ opravdu axiálně symetrické. V tomto konkrétním případě naopak nestačí jen srovnat hodnoty $\vec{U}$ v $[x,y]=[1,0]$ a $[x,y]=[0,1]$, tyto konkrétní vektory vyjdou správně otočené pro všechna a.

(Pokud nemáte rádi transformace souřadnic, pak lze podmínku axiální symetrie pole zapsat i v souřadnicích kartézských a to s použitím Lieovy derivace: $\mathcal{L}_{\vec{\xi}}\vec{U} = 0$. Pro kartézské (a obecně kontravariantní) složky vektorů platí, že $(\mathcal{L}_{\vec{\xi}}\vec{U})_i = \xi_j\partial_j U_i - U_j\partial_j\xi_i$. Zde je $\vec{\xi} = -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y$ vektorové pole otočení $\delta\vec{x} = \vec{\xi}\delta\phi$. Lieova derivace je v podstatě rozšířením derivace ve směru $\vec{\xi}.\nabla$ na vektorová pole – pro axiálně symetrické skalární pole u platí $\vec{\xi}.\nabla u = 0$.)

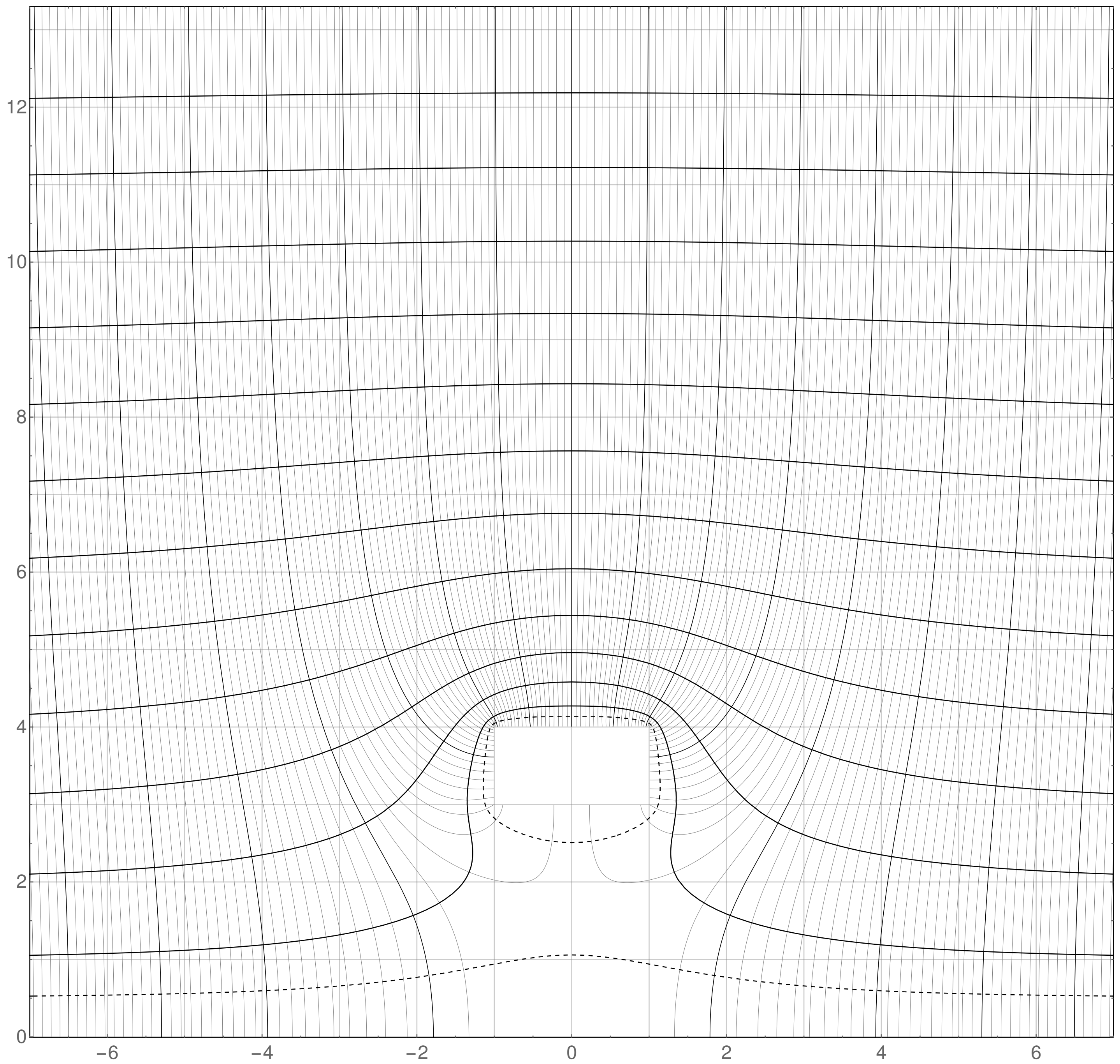
Úloha 3

K měření atmosferického elektrického pole se používají přístroje měřící náboj indukovaný na uzemněné elektrodě vystavené působení tohoto pole. Nejsilnější pole vyvolává blízkost bouřkových mraků nad místem pozorování. Protože v takové situaci často prší a padající kapky nesou také elektrický náboj, je pro snížení „rušení“ přístroj otočen tak, že měřící elektroda míří směrem k zemi. Přesvědčte se, že ačkoli by podobná ochrana před povětrnostními vlivy nebyla rozumná např. u dalekohledu, zákony elektrostatiky dovolují měřit pole elektrické nábojů v mracích i při „pohledu“ do země.

Na základě grafu ekvipotenciál a siločar axiálně symetrického modelu takovéto situace, který následuje, určete, (i) kolikrát se sníží citlivost přístroje otočením jeho měřící elektrody k zemi místo k nebi a (ii) v jakém vztahu je měřená veličina ke skutečné intenzitě atmosferického elektrického pole. Uveďte, jaké veličiny přitom musíte z grafu určit a příslušné hodnoty, které ve výpočtech použijete. Předpokládejte, že měřenou veličinou je celkový náboj indukovaný na podstavě válce.



Ukázka konstrukce měřící elektrody (vlevo) a aktuálního umístění přístroje v terénu (vpravo). Princip přístroje spočívá v tom, že rotující uzemněná clonka střídavě zakrývá a odkrývá měřící elektrodu, čímž donutí neznámý, na ní indukovaný náboj k pohybu přes měřící elektroniku.



Pole uzemněného válce o výšce $h = a$ a poloměru podstavy $R = a$ umístěného ve výšce $H = 3a$ nad vodivou rovinou do původně homogenního elektrického pole. Osa symetrie grafu představuje osu axiální symetrie úlohy, jednotlivé siločáry jsou daleko od válce, kde je pole již homogenní, rozloženy ekvidistantně s rozestupem „tučných" siločar $\Delta x = a$. (U některých variant této úlohy se rozměry válce a výška nad zemí jen vzdáleně podobají těm u přístroje na obrázku.)

Řešení: Ponechme stranou možnost, inspirovat se obrázkem k nalezení nějakého řešení Laplaceovy rovnice a oba poměry tak určit jejím řešením. Místo toho si všimneme, že na obrázku jsou vykresleny siločáry a ekvipotenciály, které obsahují jistou informaci o poli. Jak z ní určit hledané poměry?

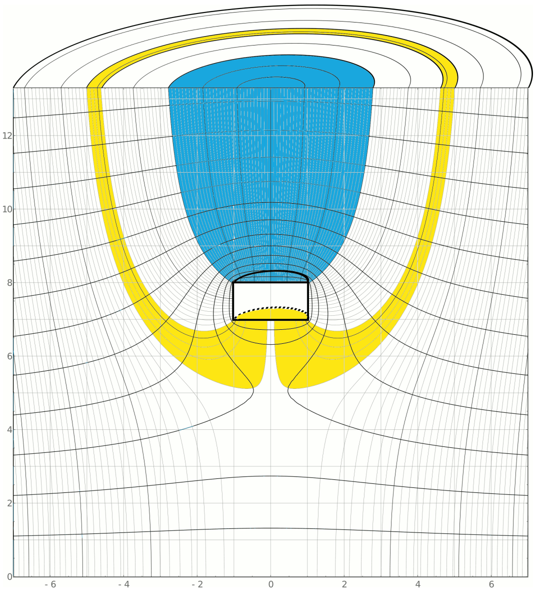
- **Ekvipotenciály** jsou na obrázku v zadání při rozlišení 600 pixelů/palec na ose od podstav válce vzdáleny 2×42 pixelů nahoře a 2×158 pixelů dole (faktorem 2 násobíme vzálenosti vložených ekvipotenciál). To dává poměr intenzit pole na ose 0.27. Pole mimo osu samozřejmě nejsou stejná, lze ovšem doufat, že poměr toků elektrického intenzity a tedy i nábojů indukovaných na obou podstavách válce $\Psi_\pm$ bude podobný. Intenzitu původní pole můžeme odhadnout z typického rozestupu ekvipotenciál na kraji obrázku, který je velmi podobný rozestupu 315 pixelů mřížky grafu (která, mimochodem představuje siločáry a ekvipotenciály pole neporušeného instalací přístroje, tedy v v našem modelu válce). To znamená, že i po obrácení k zemi by přístroj měl zaznamenat $315/(2 \times 158)$, tj. asi $1.0\times$ silnější pole, než kdyby byl zakopán do země tak, aby měřící elektroda splývala s její rovinou a přístroj nijak nenarušoval homogenní pole.

- **Siločáry** neidentifikují sílu pole takto přímo, ale platí, že stěnami trubic, jejichž povrch siločáry tvoří neprochází žádný tok elektrického pole ($\vec{dS}$ a $\vec{E}$ jsou kolmé). Proto stačí protáhnout tok podél siločar až do míst, kde je pole homogenní a tam určit příslušné toky jako součin kolmé plochy a konstantní intenzity. Tato (neznámá) intenzita se v poměru pokrátí a tedy hledaný poměr toků podstavami je zhruba roven poměru ploch žlutého mezikruží a modrého kruhu na horní straně obrázku vpravo. Tentokrát nemusíme souřadnice odečítat v pixelech, v zadní je uvedeno, že siločáry jsou daleko od válce ekvidistantně. Proto máme (s použitím vztahu pro plochu kruhu $S = \pi R^2$)

$$\frac{\Psi_-}{\Psi_+} = \frac{\pi\,38^2 - \pi\,36^2}{\pi\,22^2} \doteq 0.31$$

Protože na poloměr podstavy připadá 10 siločar homogenního pole, je poměr z bodu (ii) zadání

$$\frac{\Psi_-}{\Psi_0} = \frac{\pi\,38^2 - \pi\,36^2}{\pi\,10^2} \doteq 1.5$$



První z metod neodráží nehomogenitu rozložení nábojů na podstavách, vzhledem k tomu, že v polárních souřadnicích máme u elementu plochy $dS = 2\pi R\,dRd$ jsou hodnoty elektrické intenzity ve středu podstavy méně důležité, než ty na kraji. Druhá metoda zase naráží na velkou nepřesnost v určování, která siločára končí ve středu i na okraji dolní podstavy. Protože jde ale o model, není velmi malá přesnost výsledků na škodu (oba výsledky aktuální citlivost podceňují).