Klasická elektrodynamika

Řešení písemné části zkoušky **19.6.2006**

1. Elektrostatické pole plošného náboje.

Nalezněte potenciál elektrostatického pole buzeného sférou poloměru a nabitou plošným nábojem

$$\sigma(\theta) = \sigma_p \cos\theta \ .$$

a) Jaký je **celkový náboj** sféry?
b) Jaký je celkový **elektrický dipólový moment** náboje na sféře?
c) Na základě pozorování, že stejnou úhlovou závislost jako plošná nábojová hustota mají řešení Laplaceovy rovnice

$$\Phi = \left(\alpha r + \frac{\beta}{r^2}\right)\cos\theta$$

nalezněte **potenciály vně a uvnitř sféry** jako vhodné kombinace těchto řešení Laplaceovy rovnice.

Řešení: Nejprve si všimneme, že nábojová hustota je $\sigma(\theta) = \sigma_p z/r$ a tedy po záměně $z \to -z$ změní znaménko. Proto musí být celkový náboj nula, jak je též vidět z integrálu $Q = \int \sigma dS \sim \int_0^\pi \cos\theta \sin\theta d\theta = 0$.

Dipólový moment $\vec{p} = \int \vec{r}\sigma dS$ má směr osy z a tak stačí spočíst $p_z = \int z\sigma dS$, což po dosazení dá

$$p_z = \int\int (a\cos\theta)(\sigma_p\cos\theta)a^2 \sin\theta d\phi d\theta = \frac{4}{3}\pi a^3 \sigma_p \ .$$

Nemá-li potenciál nabývat nekonečných hodnot, musí být uvniř resp. vně příslušná konstanta nulová a můžeme psát

$$\Phi_1 = \alpha r\cos\theta \quad \text{resp.} \quad \Phi_2 = \beta r^{-2}\cos\theta \ ,$$

přičemž spojitost potenciálu na povrchu sféry vyžaduje $\beta = a^3\alpha$.

Elektrická indenzita je nespojitá na povrchu sféry a musíme tedy spočíst

$$\sigma/\epsilon_0 = \mathrm{Div}\vec{E} = \vec{e}_r.(\vec{E}_2(r=a) - \vec{E}_1(r=a)) = E_{r2} - E_{r1} = 2\alpha\cos\theta - (-\alpha\cos\theta) = 3\alpha\cos\theta \ .$$

Odsud okažitě dostáváme $\alpha = \sigma_p/(3\epsilon_0)$ a tedy

$$\Phi_1 = \frac{\sigma_p}{3\epsilon_0} r\cos\theta \quad \text{resp.} \quad \Phi_2 = \frac{\sigma_p}{3\epsilon_0}\frac{a^3}{r^2}\cos\theta \ .$$

2. Indukční vytápění.

V rámci kvazistacionárního přiblížení uvažujte válcovou zkumavku o poloměru a a výšce h naplněnou homogenní slabě vodivou kapalinou o měrné vodivosti γ. Zkumavka s osou rovnoběžnou s osou z je vložena do homogenního magnetického pole

$$\vec{B} = B \ \cos\omega t \ \vec{e}_z$$

a) Jaké je **elektrické pole** v kapalině? Všiměte si, že pole lze určit snadno s využitím osové symetrie úlohy.
b) Zjistěte, jaké **proudy** toto elektrické pole budí uvnitř zkumavky. Pro připomenutí, malá vodivost kapaliny $\gamma << a/(\mu_0\omega)$ znamená, že proudy v kapalině mění původní magnetické pole jen zanedbatelně.
c) Spočtěte **střední výkon** Jouleova tepla, které se ve zkumavce uvolňuje.

Řešení: Využijeme integrální versi Faradayova zákona $\oint E.d\vec{l} = -d/dt \int B.d\vec{S}$ kde jako integrální oblast vezmeme kruh/kružnici o poloměru R. Pak dostáváme

$$E_\phi(R)2\pi R = B\omega \sin\omega t \times \pi R^2, \quad t.j. E_\phi = \frac{R\omega}{2} B \sin\omega t \ .$$

Proudy jsou dány Ohmovým zákonem, t.j. $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ a tedy i proudočáry mají tvar soustředných kružnic okolo osy z.

Celkový tepelný výkon je

$$P = \int \vec{j}.\vec{E}dV = \int \gamma|\vec{E}|^2 dV = \int \gamma \left(\frac{R\omega B}{2}\sin\omega t\right)^2 Rd\phi dRdz = \gamma\frac{\pi h a^4\omega^2 B^2}{8}\sin^2\omega t$$

Označíme-li $V = \pi a^2 h$ objem kapaliny, je střední výkon polovinou výše uvedené hodnoty

$$\bar{P} = V\gamma\frac{a^2\omega^2 B^2}{16}$$

3. Elektromagnetické pole uvnitř vodivé krychle.

Stojaté elektromagnetické vlnění uvnitř krychle s dokonale vodivými stěnami $x, y, z = 0$ a $x, y, z = a$ má elektickou složku

$$\vec{E} = E\vec{e}_x \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\sin\omega t.$$

a) Jaká je **magnetická** část tohoto elektromagnetického pole?
b) Jaká je celková **energie** elektromagnetického pole uvnitř krychle?
c) Jak se tato energie **mění** v čase?

Pozn. Při výpočtu se může hodit vědět, že

$$\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi s}{a}\right)ds = \int_0^a \cos^2\left(\frac{\pi s}{a}\right)ds = \frac{a}{2}\ .$$

Řešení: a) Dvě Maxwellovy rovnice svazují $\vec{E}$ a $\vec{B}$, my zatím budeme uvažovat jen tu pro výpočet $\vec{B}$ poholnější: $\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$. Nejprve

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\pi}{a}E\left[-\vec{e}_z\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) + \vec{e}_y\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)\right]\sin\omega t$$

Nyní za přepokladu harmonické závislosti magnetického pole na čase (jde o stojatou vlnu) máme

$$\vec{B} = \frac{\pi}{a\omega}E\left[-\vec{e}_z\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) + \vec{e}_y\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)\right]\cos\omega t$$

b) Platí $W = W_E + W_B = \frac{1}{2}\int(\epsilon_0|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2/\mu_0)dV$ a při použití v zadání uvedených určitých integrálů máme

$$W_E = \frac{1}{2}\int \epsilon_0|\vec{E}|^2 dx\, dy\, dz = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 a\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)\sin^2\omega t = \frac{a^3\epsilon_0 E^2}{8}\sin^2\omega t$$

a podobně

$$W_B = \frac{1}{2}\int |\vec{B}|^2/\mu_0 dx\, dy\, dz = \frac{1}{2}\left(\frac{E\pi}{a\omega}\right)^2\frac{1}{\mu_0}\left[a\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right) + a\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)\right]\cos^2\omega t = \left(\frac{E\pi}{a\omega}\right)^2\mu_0^{-1}\frac{a^3}{4}\cos^2\omega t$$

c) Celková energie eklektromagnetického pole uvnitř koule se měnit nemůže, tok Poyntingova vektoru skrze stěny je očividně nulový. To znamená že faktory stojící před $\sin^2 \omega t$ resp. $\cos^2 \omega t$ u W_E resp. W_B musejí být stejné

$$\frac{a^3 \epsilon_0 E^2}{8} = \left(\frac{E\pi}{a\omega}\right)^2 \mu_0^{-1} \frac{a^3}{4}$$

tedy

$$\omega^2 = 2\left(\frac{c\pi}{a}\right)^2 \ .$$

Tato rovnost vyjde pokud bychom nezapomněli v bodě a) požadovat splnění i rovnice $\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E}$ resp. ekvivaleně vyžadovali splnění vlnové rovnice $(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_{tt})\vec{E} = 0$.

Nesplňuje-li pole Maxwellovy rovnice, nic nám negarantuje, že se bude zachovávat energie.