Klasická elektrodynamika

Řešení písemné části zkoušky **9.6.2006**

1. Kapacita a intenzita pole vodivého rotačního elipsoidu

Elektrické pole vodiče ve tvaru rotačního elipsoidu

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

o hlavní polose a a dvou vedlejších $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ nabitého nábojem Q je popsáno potenciálem

$$\Phi = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0\ e} \ln \frac{|z| + e + \sqrt{x^2 + y^2 + (|z| + e)^2}}{|z| - e + \sqrt{x^2 + y^2 + (|z| - e)^2}}\ ,$$

Určete **kapacitu** tohoto vodiče, velikost **elektrické intenzity** na pólu a na rovníku a pak i jejich poměr.

Řešení: Pokud věříme zadání, je potenciál konstantní na povrchu uvedeného rotačního elipsoidu, takže si vybereme výhodný bod na jeho povrchu, řekněme severní pól $z = a,\ x = y = 0$ a převrácenou hodnotu kapacity spočteme jako napětí při jednotkovém náboji a v místě povrchu vodiče (pod jeho povrchem se samozřejmě průběh potenciálu redukuje na $\Phi = \text{konst.}$):

$$C = \frac{1}{\Phi(z = a,\ x = y = 0; Q = 1)} = \frac{8\pi\epsilon_0 e}{\ln \frac{a+e}{a-e}}.$$

Zde stojí za to uvést i limitu kapacity pro $e \to 0$:

$$C = \frac{8\pi\epsilon_0 e}{\ln \frac{1+e/a}{1-e/a}} \doteq \frac{8\pi\epsilon_0 e}{0 + 2e/a + O(e^2)} = 4\pi\epsilon_0 a,$$

což je samozřejmě kapacita koule o poloměru $a = b$.

Protože víme, jaký směr mají tečny k povrchu uvažovaného elipsoidu, stačí uvažovat potenciál jako fukci jediné proměnné $\Phi(z; x = y = 0)$ resp. $\Phi(x; y = z = 0)$ a místo vektoru gradientu spočístt jen $\partial_z\Phi$ resp. $\partial_x\Phi$. Máme tedy jedinou nenulovou složku

$$E_{z|x=y=0} = -\Phi' = \frac{-Q}{8\pi\epsilon_0 e}\ [\ln(z + e) - \ln(z - e)]' = \frac{-Q}{8\pi\epsilon_0 e}\ [1/(z + e) - 1/(z - e)]_{z=a} =$$

$$= \frac{-Q}{8\pi\epsilon_0 e}\ \frac{-2e}{z^2 - e^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{1}{b^2}$$

v případě severního pólu a podobně na průsečíku nultého poledníku a rovníku je nenulová jen složka

$$E_{x|y=z=0} = -\Phi' = \frac{-Q}{8\pi\epsilon_0 e}\ [\ln(\sqrt{x^2 + e^2} + e) - \ln(\sqrt{x^2 + e^2} - e)]' = ... = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{1}{ab}\ .$$

Stejně tak, jako správnou limitu pro vodič ve tvaru koule, vidíme, že poměr vychází

$$\frac{|E_{\text{pol}}|}{|E_{\text{rovnik}}|} = \frac{a}{b} \,.$$

Za pozornost stojí, že tento výsledek bychom dostali, i kdybychom uvažovali vodiče ve tvaru zploštělého elipsoidu.

2. Střídavé magnetické pole v tenkém plechu.

Je známo, že střídavé magnetické obvody z vodivého materiálu (např. oceli) jsou stavěny z navzájem izolovaných tenkých vrstev (plechů). Předpokládejte, že v takové vrstvě $x \in (-d, d)$ je homogenní magnetické pole $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t)\vec{e}_z$.
a) Jaké hraniční podmínky musí splňovat indukovaný elektrický proud na kraji vrstvy $x = \pm d$?
b) Nalezněte indukované **elektrické pole** uvnitř vrstvy za předpokladu, že $\vec{E}$ závisí jen na souřadnici x a všechny siločáry tohoto elektrického pole jsou navzájem rovnoběžné.
c) Spočtěte, jak velký **výkon** $P = \int \vec{j}.\vec{E}dV$ se ve vrstvě mění na teplo za předpokladu malé vodivosti γ, tedy je-li tloušťka vrstvy mnohem menší, než je hloubka vniku $\delta \gg 2d$ a můžeme znedbat magnetické pole vířivých proudů.
d) Tento výkon vyjádřete též na *jednotku objemu* vrstvy (tzv. **specifické ztráty** vířivými proudy). Jak tento výsledek vysvětluje výhodnost vrstveného magnetického obvodu z vodivého materiálu?

Řešení: a) Protože jsou jednotlivé vrstvy navzájem izolovány, musejí být na jejich kraji elektrický proud a tedy i elektrické pole (platí Ohmův zákon) rovnoběžné s povrchem vrstvy, tedy $j_x = 0$.
b) Protože magnetické pole je kostantní v prostoru, budme elektrické pole hledat mezi lineáními funkcemi souřadnic. Závislí-li podle zadání jen na x, magnetické pole má směr z, hledáme elektrické pole ve směry y ve tvaru $\vec{E} = K\ x\ \sin(\omega t)\vec{e}_y$ a dosazením do $\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ dostáváme $K = \omega B_0$.
c) Elektrické pole ve vodiči vytváří ve vodiči plochy S a tloušťky $2d$ Jouleovo teplo (výkon)

$$P = \int \vec{j}.\vec{E}dV = \int \gamma|\vec{E}|^2 dV = \gamma S \omega^2 B_0^2 \int_{-d}^{d} x^2 dx \sin^2 \omega t = \frac{2}{3} S \omega^2 B_0^2 d^3$$

d) Objem vrstvy je $2Sd$ a tedy měrné ztráty jsou úměrné d^2. Proto při daném objemu magnetického obvodu, je výhodné mít míce tenčích navzájem izolovaných plechů.

3. Elektromagnetické pole uvnitř vodivé krychle.

Stojaté elektromagnetické vlnění uvnitř krychle s dokonale vodivými stěnami $x, y, z = 0$ a $x, y, z = a$ má elektickou složku

$$\vec{E} = E\vec{e}_x \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \sin \omega t.$$

a) Jaká je **magnetická** část tohoto elektromagnetického pole?
b) Jakou **energii** má toto elektromagnetické pole?
c) Jak se tato energie **mění** v čase?

Řešení: a) Dvě Maxwellovy rovnice svazují $\vec{E}$ a $\vec{B}$, my zatím budeme uvažovat jen tu pro výpočet $\vec{B}$ poholnější: $\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$. Nejprve

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\pi}{a} E \left[-\vec{e}_z \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) + \vec{e}_y \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) \right] \sin \omega t$$

Nyní za přepokladu harmonické závislosti magnetického pole na čase (jde o stojatou vlnu) máme

$$\vec{B} = \frac{\pi}{a\omega} E \left[-\vec{e}_z \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) + \vec{e}_y \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) \right] \cos \omega t$$

b) Platí $W = W_E + W_B = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 |\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2/\mu_0) dV$ a při použití

$$\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi s}{a}\right) ds = \int_0^a \cos^2\left(\frac{\pi s}{a}\right) ds = \frac{a}{2}$$

máme

$$W_E = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 |\vec{E}|^2 dx\, dy\, dz = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 a \left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right) \sin^2 \omega t = \frac{a^3 \epsilon_0 E^2}{8} \sin^2 \omega t$$

a také

$$W_B = \frac{1}{2} \int |\vec{B}|^2/\mu_0 dx\, dy\, dz = \frac{1}{2} \left(\frac{E\pi}{a\omega}\right)^2 /\mu_0 \left[a\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right) + a\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right) \right] \cos^2 \omega t =$$

$$= \left(\frac{E\pi}{a\omega}\right)^2 \mu_0^{-1} \frac{a^3}{4} \cos^2 \omega t$$

c) Celková energie eklektromagnetického pole uvnitř krychle se měnit nemůže, tok Poyntingova vektoru skrze stěny je očividně nulový. To znamená že faktory stojící před $\sin^2 \omega t$ resp. $\cos^2 \omega t$ u W_E resp. W_B musejí být stejné

$$\frac{a^3 \epsilon_0 E^2}{8} = \left(\frac{E\pi}{a\omega}\right)^2 \mu_0^{-1} \frac{a^3}{4}$$

tedy

$$\omega^2 = 2 \left(\frac{c\pi}{a}\right)^2 \ .$$

Tato rovnost vyjde pokud bychom nezapomněli v bodě a) požadovat splnění i rovnice $\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}$ resp. ekvivaleně vyžadovali splnění vlnové rovnice $(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_{tt})\vec{E} = 0$.

Nesplňuje-li pole Maxwellovy rovnice, nic nám negarantuje, že se bude zachovávat energie.