Klasická elektrodynamika

Písemná část zkoušky 22. 5. 2007

1. Siločáry dipólu.

Nalezněte a vyřešte rovnici siločáry elektrického pole dipólu $\vec{p} = p\,\vec{e}_z$

$$\vec{E} \;=\; -\operatorname{grad}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}.\vec{r}}{r^3}\right) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\;\vec{p}.\vec{r}\;\vec{r} - \vec{p}\;r^2}{r^5}$$

Při řešení se doporučuje pracovat ve sférických souřadnicích, kde

$$\vec{dl} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,d\phi\,\vec{e}_\phi$$

a

$$\operatorname{grad} f = f_{,r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}f_{,\theta}\,\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}f_{,\phi}\,\vec{e}_\phi\;.$$

Řešení. Elektrické pole dipólu je

$$\vec{E} \;=\; -\nabla\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2} \;=\; \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(2\cos\theta\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta\right)\;.$$

Použitím rovnice siločáry $\frac{d\vec{l}}{du} = \lambda\vec{E}$ dostáváme

$$dr = \lambda\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\;\;2\cos\theta\;,$$

$$rd\theta = \lambda\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\;\;\sin\theta\;,$$

$$r\sin\theta d\phi = 0\;.$$

Poslední rovnice říká, že siločáry budou rovinné křivky ležící v rovině $\phi = \text{konst.}$ Podělením prvních dvou dostáváme

$$\frac{dr}{r} \;=\; 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta\;,$$

tedy (pokud integrační konstantu označíme $-\ln r_0$)

$$\ln\frac{r}{r_0} \;=\; \ln\sin^2\theta\;,$$

a tedy rovnice siločáry je

$$r(\theta) \;=\; r_0\sin^2\theta\;.$$

2. Asynchronní motor v klidu.

V rámci kvazistacionárního přiblížení nalezněte moment síly, jaká působí na velmi dlouhý válec s osou totožnou s osou z, pokud je válec vložený do otáčivého magnetického pole

$$\vec{B} = B_0\left(\cos\omega t\,\vec{e}_x + \sin\omega t\,\vec{e}_y\right)\;,$$

které budí soustava cívek statoru. O válci poloměru a a výšce h předpokládejte, že vodivý je jen jeho plášť a ten je natolik tenký, že můžete uvažovat plošné proudy dané Ohmovým zákonem $\vec{j}_2 = \gamma_2\vec{E}$. Předpokládejte dále, že plášť válce je vyrobený z málo vodivého materiálu. Proudy tekoucí na povrchu válce jsou potom natolik malé, že jimi buzené magnetické pole lze zanedbat (to platí jen u zkoušky, v praxi by šlo o stroj s malou účinností).
1) Zjistěte jaké elektrické pole doprovází v kvazistacionárním přiblížení proměnné pole magnetické. Využijte toho, že magnetické pole nezávisí na prostorových souřadnicích a tedy elektrické pole lze hledat mezi lineárními funkcemi souřadnic. Vyberte takové pole, které respektuje translační symetrii podél osy z. Pro velmi dlouhý válec je navíc rozumné požadovat aby, siločáry byly rovnoběžné s osou z.
2) Spočtěte proudy tekoucí po válcové ploše v přiblížení $a << h$.
3) Spočtěte moment sil těchto proudů.

Při integraci po povrchu válce můžete využít $\int x^2\;dS = \int y^2\;dS = Sa^2/2$, kde $S = 2\pi ah$ je plocha pláště válce a $\int xz\,dS = \int yz\,dS = \int xy\,dS = 0$.

Řešení. 1) Elektrické pole má i) mít siločáry rovnoběžné s osou z, ii) neměnit se při posunutí v tomto směru a iii) má to být lineární funkce souřadnic. Takové pole lze zapsat

$$\vec{E} \;=\; (px + qy)\vec{e}_z\;.$$

Rovnice $\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ má tedy tvar

$$\nabla(px+qy) \times \vec{e}_z \;=\; q\vec{e}_x - p\vec{e}_y \;=\; \omega B_0 \sin\omega t\, \vec{e}_x - \omega B_0 \cos\omega t\, \vec{e}_y \;.$$

Odsud snadno odečteme hodnoty p a q a získáme tvar elektrického pole respektujícího symetrii problému

$$\vec{E} \;=\; \omega B_0 (x\cos\omega t + y \sin\omega t)\vec{e}_z \;.$$

2) Po povrchu válce protéká proud

$$\vec{j}_2 \;=\; \vec{\gamma}_2 \vec{E} \;=\; \gamma_2 \omega B_0 (x\cos\omega t + y\sin\omega t)\vec{e}_z \;.$$

V souladu se zadáním předpokládáme, že magnetické pole jím vyvolané je velmi slabé a můžeme jej zanedbat oproti budícímu poli B_0. Stále předpokládáme, že $a << h$. U konců válce přestávají být proudočáry rovnoběžné s osou z, neboť se musejí uzavírat do smyček. Dle předpokladu je ale tato oblast velmi malá ve srovnání s délkou válce.

3) Moment síly spočteme jako integrál

$$\vec{\mathcal{M}} \;=\; \int \vec{r} \times (\vec{j}_2 \times \vec{B}) dS \;.$$

Nejprve tedy spočteme

$$\vec{j}_2 \times \vec{B} \;=\; \gamma_2 \omega B_0 (x\cos\omega t + y\sin\omega t)\vec{e}_z \;\times B_0 \left(\cos\omega t\, \vec{e}_x + \sin\omega t\, \vec{e}_y\right) \;=$$

$$\gamma_2 \omega B_0^2 (x\cos\omega t + y\sin\omega t)\left(\cos\omega t\, \vec{e}_y - \sin\omega t\, \vec{e}_x\right)$$

a poté

$$d\vec{\mathcal{M}} \;=\; (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \times (\vec{j}_2 \times \vec{B})\; dS \;=$$

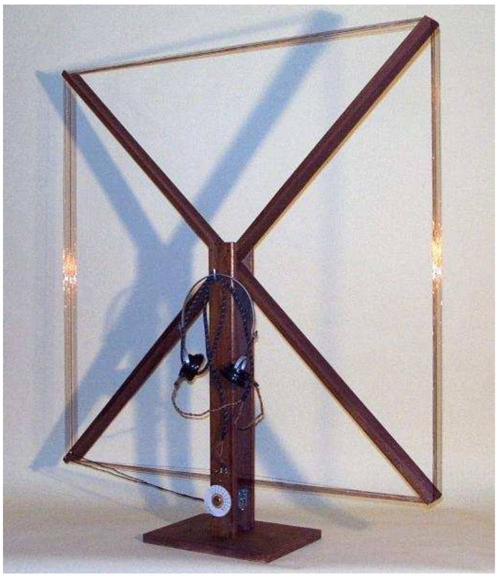
$$\gamma_2 \omega B_0^2 (x\cos\omega t + y\sin\omega t)\left(x\cos\omega t\, \vec{e}_z + y\sin\omega t\, \vec{e}_z + \ldots\right) dS \;=\; \gamma_2\omega B_0^2 \left(x^2\cos^2\omega t + y^2 \sin^2\omega t\right)\, \vec{e}_z dS + \ldots \;,$$

kde ... jsou členy úměrné xz, yz nebo xy, které při integrování vypadnou. Tak s použitím vztahů pro integraci kvadratických funkci souřadnic po povrchu válce dostáváme

$$\vec{\mathcal{M}} \;=\; \frac{1}{2}\gamma_2 \omega B_0^2 a^2 S \vec{e}_z \;.$$

3. Rámová anténa.

Rovinná lineárně polarizovaná elektromagnetická vlna harmonického průběhu s vlnovou délkou λ a s elektrickou složkou ve směru $\vec{e}_z$ se šíří ve směru $\vec{e}_x$, přičemž hustota toku energie elektromagnetické vlny je S. Spočtěte napětí naprázdno na svorkách rámové antény tvořené jedním čtvercovým závitem o straně a. Jakou ideální orientaci by měla anténa mít? Rozměry antény jsou zanedbatelné vůči vlnové délce, tj. $a \ll \lambda$.



Řešení. Pro Poyntingův vektor u rovinné vlny dostáváme

$$\vec{S} = -\vec{H} \times \vec{E} \;=\; -\frac{1}{\mu_0}\vec{B} \times (-\vec{n} \times c\vec{B}) \;=\; \frac{c}{\mu_0}\vec{n}|\vec{B}|^2 \;.$$

Protože u toku výkonu S není explicitně uveden jeho časový průběh, můžeme předpokládat, že jde o střední hodnotu a ta je pro harmonický průběh rovna $S = \frac{1}{2}S_{\max} = \frac{c}{2\mu_0}B_{\max}^2$, z čehož dostáváme

$$B_{\max} = \sqrt{2\mu_0 c^{-1} S} \;.$$

Na svorkách rámové antény pak bude podle integrální verse Faradayova zákona elektromagnetické indukce harmonické napětí ($\omega = 2\pi f = \frac{2\pi c}{\lambda}$) s amplitudou

$$U_{max} = \partial_t \Psi = \omega a^2 B_{max} = \frac{2\pi c}{\lambda} a^2 \sqrt{2\mu_0 c^{-1} S} \;.$$