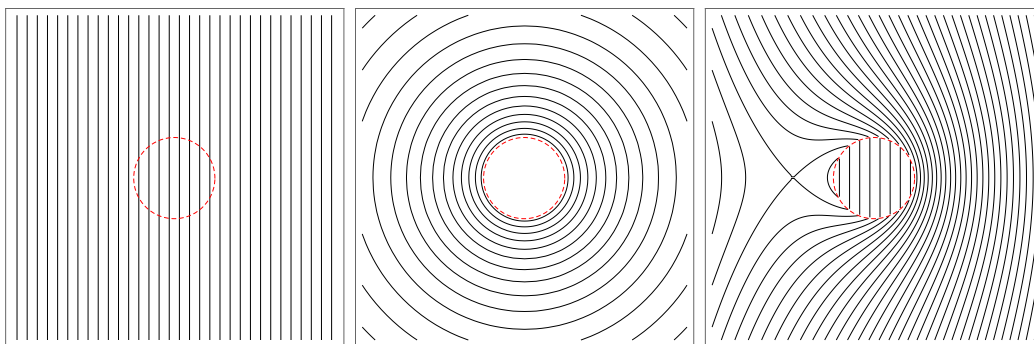


Vzorné řešení písemné práce z Klasické elektrodynamiky
Kristýna Hovořáková

Úloha 1

Do homogenního magnetického pole $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_y$ je vložen přímý vodič ve tvaru pláště válce $x^2 + y^2 = a^2$. Po povrchu teče rovnoměrně rozložený plošný proud $\vec{j}_{\text{plos}} = I \vec{e}_z / (2\pi a)$.



a) Spočítejte, jakou **silou** působí magnetické pole \vec{B}_0 na proud I rozložený výše uvedeným způsobem na úseku vodiče délky L .

Výpočet má za úkol určit

$$\vec{F} = \int \vec{j}_{\text{plos}} \times \vec{B}_0 \, dl \, dz.$$

Protože magnetické pole je homogenní, lze jej z integrálu vytknout

$$\vec{F} = \left[\int \vec{j}_{\text{plos}} \, dl \, dz \right] \times \vec{B}_0 = L [I \vec{e}_z] \times \vec{B}_0 = -B_0 L I \vec{e}_x.$$

Pozn. V zadání byl původně obrázek popisující složené pole pro zápornou hodnotu proudu I . Někteří znalci magnetického pole dokáží z tvaru siločar pole uhodnout, jakým směrem působí jeho účinky, zde by např. komentář zněl, že “siločáry prahnou po narovnání” a proto síla působí doleva. Pokud si někdo záporného znaménka I na původním pravém obrázku všiml, bude to pozitivně ohodnoceno.

b) Nalezněte **magnetické pole** \vec{B}_1 jaké proud vytváří uvnitř a vně válcového vodiče bez přítomnosti pole \vec{B}_0

Takové pole jsme počítali za použití Ampérova zákona na cvičení a víme, že

$$\vec{B}_1 = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_\phi & r > a \end{cases}.$$

c) Nalezněte, jakou **silou** působí výsledné složené magnetické pole $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$ na kus přímého vodiče délky L , když jej počítáme podle vzorce

$$\vec{F} = \int \vec{j}_{\text{plos}} \times \{\vec{B}\} \, dS.$$

Průměrné magnetické pole

$$\{\vec{B}\} = \frac{1}{2} [\vec{B}_0 + (\vec{B}_0 + \vec{B}_1)] = \vec{B}_0 + \frac{1}{2} \vec{B}_1.$$

při výpočtu (l je délka po obvodu válce, $d\vec{S} = dl \, dz$)

$$\vec{F} = \int \vec{j}_{\text{plos}} \times \vec{B}_1 \, dl \, dz$$

se brzy dopočítáme ke klíčovému faktoru

$$\vec{e}_z \times \oint \vec{e}_\phi dl = a\vec{e}_z \times \int_0^\pi (-\sin\phi \vec{e}_x + \cos\phi \vec{e}_y) d\phi = 0,$$

protože $\int_0^{2\pi} \cos s ds = \int_0^{2\pi} \sin s ds = 0$. Proto je výsledná síla totožná s bodem a).

d) Najděte celkový tok Maxwellova tenzoru

$$F_i = \oint T_{ij} dS_j = \oint \left[B_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B_k H_k \right] dS_j$$

povrchem válce daného pláštěm $x^2 + y^2 = b^2$ a podstavami $z = 0, z = L$. Diskutujte obě možnosti, $b < a$ i $b > a$.

Při výpočtu musíme opět přejít ke kartézské vektorové bázi, můžeme pak bázové vektory vytknout před integrály. Dále, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

Tok tenzoru T_{ij} podstavami ani nemusíme počítat, protože se kvůli opačné orientaci normál přesně vyruší.

Podél pláště máme $d\vec{S} = L(\cos\phi \vec{e}_x + \sin\phi \vec{e}_y) d\phi$ a pro $R < a$, kde $\vec{B} = \vec{B}_0$ je tedy

$$\vec{F}^< = H_0 B_0 \left[\vec{e}_y \int \vec{e}_y \cdot d\vec{S} - \frac{1}{2} \int d\vec{S} \right] = 0.$$

Pokud je integrační plocha vně, tedy $b > a$, je výpočet o dost delší (opět $\vec{e}_\phi = -\sin\phi \vec{e}_x + \cos\phi \vec{e}_y$):

$$\begin{aligned} \vec{F}^> &= \vec{F}^< + \int \vec{B}_0 \vec{H}_1 \cdot d\vec{S} + \int \vec{B}_1 \vec{H}_0 \cdot d\vec{S} + \int \vec{B}_1 \vec{H}_1 \cdot d\vec{S} - \frac{1}{2} \int (\vec{B}_0 \cdot \vec{H}_1 + \vec{B}_1 \cdot \vec{H}_0 + \vec{B}_1 \cdot \vec{H}_1) d\vec{S} \\ &= \frac{B_0 I}{2\pi a} \vec{e}_y \int \vec{e}_\phi \cdot d\vec{S} + \frac{B_0 I}{2\pi a} \int \vec{e}_\phi \vec{e}_y \cdot d\vec{S} + \frac{\mu_0 I^2}{(2\pi a)^2} \int \vec{e}_\phi \vec{e}_\phi \cdot d\vec{S} - \frac{1}{2} \frac{B_0 I}{2\pi a} \int (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_\phi + \vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_y) d\vec{S} - \frac{1}{2} + \frac{\mu_0 I^2}{(2\pi a)^2} \int (\vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_\phi) d\vec{S} \\ &= 0 + \frac{B_0 I}{2\pi a} (-\pi a L \vec{e}_x) + 0 - \frac{1}{2} \frac{B_0 I}{2\pi a} (\frac{1}{2} 2\pi a L \times 2) = -B_0 L I \vec{e}_x. \end{aligned}$$

Úloha 2

Účinky vířivých proudů se často demonstrují pomocí kyvadla tvořeného plochým vodičem kývajícím se mezi póly magnetu, případně magnetem klouzajícím po hliníkové, nemagnetické pánvi. Nalezněte matematický popis této situace pro dostatečně velký tenký vodivý plech vložený do malé mezery mezi dvěma válcovými magnety s magnetizací podél společné osy válců, kterou zpočátku ztotožníme s osou z .

a) Ukažte, že homogenní pole $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ uvnitř válce s poloměrem a a nulové vně tohoto válce odpovídá magnetickému poli velmi dlouhého tyčového magnetu s konstantní magnetizací \vec{M} . Nalezněte vztah \vec{B}_0 a \vec{M} .

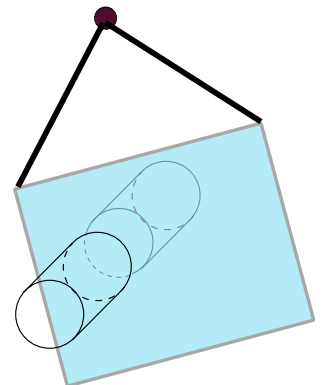
Nejprve definice: $\vec{H} = \mu_0^{-1} \vec{B} - \vec{M}$. V limitě dlouhého solenoidu/tyčového magnetu máme vně nulové pole, \vec{B} i \vec{H} . Protože uvnitř je pole rovnoběžné s osou válce/magnetu, vyžaduje spojitost \vec{H}_\parallel na plášti magnetu, aby bylo $\vec{H} = 0$ i uvnitř a tedy hledaný vztah mezi je \vec{B}_0 a \vec{M} je $\vec{B} = \mu_0 \vec{M}$.

b) Nalezněte souvislost mezi křivkovým integrálem $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$ podél hranice plochy Σ a magnetickým tokem touto plochou.

Rovnost obou veličin vyplývá ze Stokesovy věty:

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

c) Na základě b) nalezněte vektorový potenciál uvažovaného velmi dlouhého tyčového magnetu ve tvaru $\vec{A}_0 = A_\phi(R) \vec{e}_\phi$, kde R je válcová souřadnice $R^2 = x^2 + y^2$. Jako plochu Σ volte kruhy v rovině $z = \text{konst.}$ se středem na ose z o obecném poloměru R . Nalezněte \vec{A} uvnitř i vně válce.



Pokud použijeme plochu doporučeného tvaru je cirkulace vektorového potenciálu rovna $2\pi R A_\phi$ a magnetický tok pak $\pi R^2 B_0$ pro $R < a$ a za hranicí magnetu pak $\pi a^2 B_0$. Proto

$$\vec{A}_0(R) = \begin{cases} \frac{R}{2} B_0 \vec{e}_\phi & R < a \\ \frac{a^2}{2R} B_0 \vec{e}_\phi & R > a \end{cases}.$$

Protože jde o vektorový potenciál je to jen jedna z mnoha možných variant, ovšem vykazuje užitečné symetrie – translační a axiální, které, jak ještě uvidíme, umožní dále při popisu pole si vystačit jen s \vec{A} a mít všude $\Phi = 0$.

d) Spočítejte $\nabla \times \vec{A}_0$ uvnitř i vně válce. Jaký význam má toto vektorové pole?

Jde očividně jen o cvičení, magnetické pole, tedy $\nabla \times \vec{A}$ bychom mohli snadno nalézt s použitím Ampérova zákona. Ze vztahu pro rotaci ve válcových souřadnicích máme $\nabla \times (f(R)\vec{e}_\phi) = R^{-1}(Rf)'\vec{e}_z$ a tedy

$$\vec{B}_0(R) = \nabla \times \vec{A}_0 = \begin{cases} B_0 \vec{e}_z & R < a \\ 0 & R > a \end{cases}.$$

Mohli jsme si toho všimnout již dříve, ale tento výpočet ilustruje slavnou podivnost vektorového potenciálu solenoidu (viz Aharonovův–Bohmův jev): venku **není** sice není žádné magnetické pole, ale **je** tam netriviální kalibrační transformací nezrušitelný vektorový potenciál.

e) Spočítejte $\nabla \cdot \vec{A}_0$ uvnitř i vně válce.

Je to nula, A_ϕ ani žádný z Laméových koeficientů h_R, h_z nezávisí na ϕ .

f) Spočítejte $\Delta \vec{A}_0$ uvnitř i vně válce. Jaký význam má toto vektorové pole?

Opět cvičení, jde o $(-\mu_0 \times)$ proudové pole, protože $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ a platí, že $\Delta \vec{A} = -\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = -\nabla \times \vec{B}$. Rotace nulového (vně) i homogenního pole (uvnitř) je nula. Není to nula na plášti magnetu, ale δ distribuci si pro tentokrát odpustíme.

g) Vyjádřete \vec{A}_0 v kartézských souřadnicích x, y, z a kartézské vektorové bázi $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$.

Toto je klíčový bod pro další kroky a tedy podrobně, nejprve vzorec pro gradient ve válcových souřadnicích a báze vektory:

$$\nabla f(R, \phi) = (\partial_R f) \vec{e}_R + \frac{1}{R} (\partial_\phi f) \vec{e}_\phi$$

$$\vec{e}_x = \nabla x = \nabla(R \cos \phi) = \cos \phi \vec{e}_R - \sin \phi \vec{e}_\phi, \quad \vec{e}_y = \nabla y = \nabla(R \sin \phi) = \sin \phi \vec{e}_R + \cos \phi \vec{e}_\phi.$$

Obrácená transformace je nyní snadno vidět

$$\vec{e}_R = \cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y, \quad \vec{e}_\phi = \cos \phi \vec{e}_y - \sin \phi \vec{e}_x.$$

Proto

$$\vec{A}_0(x, y) = \begin{cases} \frac{B_0}{2} (x \vec{e}_y - y \vec{e}_x) & R < a \\ \frac{B_0 a^2}{2} \frac{x \vec{e}_y - y \vec{e}_x}{x^2 + y^2} & R > a \end{cases}.$$

h) Předpokládejte, že nyní magnetem pomalu ($\ll c$) pohybujeme, takže vektorový potenciál má nyní tvar

$$\vec{A}(t, x, y) = A_0(x - vt, y)$$

Jak vypadá nyní magnetické pole odpovídající \vec{A} ?

Nejprve připomeňme, že posunutím $x \rightarrow x - vt$ se nemění bázové vektory a proto je možné tuto substituci (Galileovu transformaci snadno provést):

$$\vec{A}_0(x - vt, y) = \begin{cases} \frac{B_0}{2}((x - vt)\vec{e}_y - y\vec{e}_x) & R < a \\ \frac{B_0 a^2}{2} \frac{(x - vt)\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{(x - vt)^2 + y^2} & R > a \end{cases}.$$

Kdyby snad někdo zaváhal, zda nezůstat u válcové báze, zkusíme zde spočítat, co se stane posunutím \vec{e}_ϕ :

$$\begin{aligned} \vec{e}'_\phi &= \cos \phi' \vec{e}_y - \sin \phi' \vec{e}_x = \frac{x - vt}{\sqrt{(x - vt)^2 + y^2}} \vec{e}_y - \frac{y}{\sqrt{(x - vt)^2 + y^2}} \vec{e}_x = \\ &= \frac{x - vt}{\sqrt{(x - vt)^2 + y^2}} (\sin \phi \vec{e}_R + \cos \phi \vec{e}_\phi) - \frac{y}{\sqrt{(x - vt)^2 + y^2}} (\cos \phi \vec{e}_R - \sin \phi \vec{e}_\phi) = \\ &= \frac{-vty}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{(x - vt)^2 + y^2}} \vec{e}_R + \frac{(x - vt)x + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{(x - vt)^2 + y^2}} \vec{e}_\phi = \\ &= \frac{-vt \sin \phi}{\sqrt{R^2 + v^2 t^2 - 2vtR \cos \phi}} \vec{e}_R + \frac{R - vt \cos \phi}{\sqrt{R^2 + v^2 t^2 - 2vtR \cos \phi}} \vec{e}_\phi. \end{aligned}$$

ch) Jaký význam má pole $-\partial_t \vec{A}$.

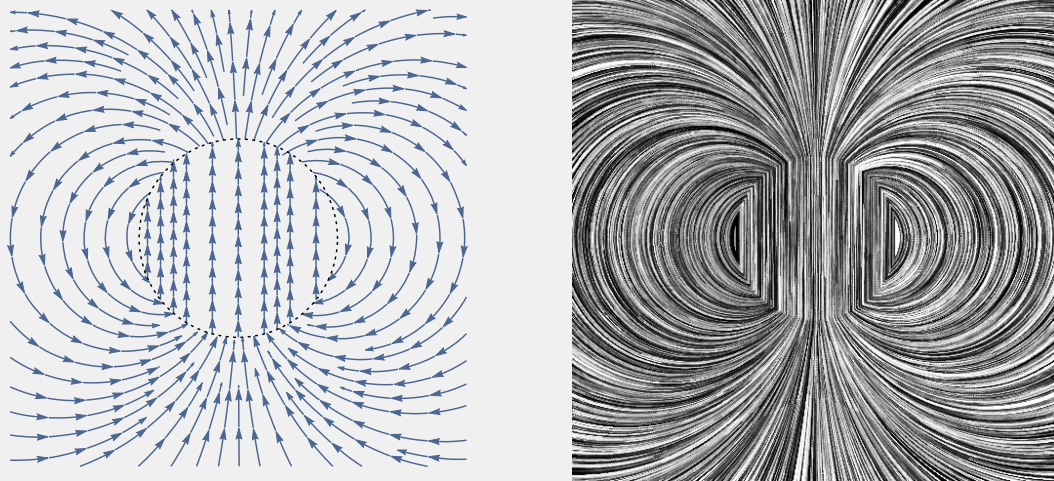
Jde o indukované elektrické pole, přesněji o jeho část zvanou elektromotorické pole. Tento název má evokovat představu, že je odpovědná za rozpohybování nábojů v důsledku elektromagnetické indukce, ale ještě záleží na zbytku “obvodu”, jak se aktuálně pole rozloží. V polním popisu to odpovídá hledání Φ tak, aby výsledné elektrické pole $\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \nabla \Phi$ bylo to “správné”. U příkladu s vodičem ve tvaru šroubovice jsme viděli, že vodiče vložené do magnetického pole vyžadují dopočíst Φ tak aby výsledné pole souznělo s tvarem vodiče případně i dalšími okolnostmi odborně nazývanými *hraniční podmínky*. Zde bychom to museli učinit, kdyby vodič měl konečné rozměry – proudové pole stanovené jen z našeho $-\partial_t \vec{A}$ – by vyčuhovalo na krajích ven (to nesmí a vhodné Φ by to zachránilo).

i) Předpokládejte, že v magnetu je velmi tenká mezera, která nijak nenaruší tvar \vec{A} , \vec{B} a \vec{E} . Do této mezery je mezi pohybující se magnety magnety vložen stojící tenký plech s ohmickou plošnou vodivostí $\hat{\gamma}$ udávající vztah mezi elektrickým polem (v rovině plechu) a polem plošného proudu $\vec{j}_{\text{plos}} = \hat{\gamma} \vec{E}$. Naleznete sílu $\vec{F} = \int \vec{j}_{\text{plos}} \times \vec{B} dS$, jíž pohybující se pár magnetů působí na plech. Magnetické pole vytvářené vířivými proudy v plechu zanedbejte.

Tvar indukovaného elektrického pole $\vec{E} = -\partial_t \vec{A}_0(x - vt, y)$ určíme, překvapivě, derivováním. Pro $R < a$ je $\vec{A}_0(x - vt, y)$ lineární funkcí času a tak musíme dostat konstantu, pro $R > a$ je to o něco více práce. Vyjde (za použití $x' = x - vt$)

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{B_0}{2} v \vec{e}_y & R < a \\ \frac{B_0 a^2 v}{2} \frac{2x' y \vec{e}_x - (x'^2 - y^2) \vec{e}_y}{(x'^2 + y^2)^2} & R > a \end{cases}.$$

Lineární vztah mezi elektrickým a proudovým polem (Ohmův) znamená, že tvar proudového pole je stejný jako pole elektrického. Zatímco doposud dříve ověřená podmínka $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ vedla na bezdrojové elektrické pole, nyní tatáž podmínka znamená, že proudové pole je stacionární. To znamená, že nám nám nic nebrání přijmout $\vec{j}_{\text{plos}} = \hat{\gamma} \vec{E}$ jako skutečnou proudovou hustotu (viz obrázek).



Obr. 1 Vířivé proudy v plechu mezi dvojicí pohybujících se válcových magnetů. Výše nalezené proudové pole je znázorněno dvěma metodami. Kružnice znázorňuje okamžitou polohu magnetů – jsme v kvazistacionární aproximaci a tedy proudové pole okamžitě sleduje pohyb magnetů.

Výpočet síly je vzhledem k tomu, že mezi magnety je konstantní \vec{B} i \vec{j}_{plos} , snadný:

$$\vec{F} = (\pi a^2) \vec{j}_{\text{plos}} \times \vec{B} = (\pi a^2 \hat{\gamma}) \vec{E} \times \vec{B} = \pi a^2 \hat{\gamma} \frac{B_0}{2} v \vec{e}_y \times B_0 \vec{e}_z = +\frac{1}{2} v \pi a^2 \hat{\gamma} B_0^2 \vec{e}_x.$$

Směr síly táhne plech ve směru pohybu magnetů. Faktor 1/2 lze vykládat různě, např. tak, že proudové pole překonává odpor vodiče nejen mezi magnety, ale i na cestě okolo.

j) Prémiový úkol: Na základě Ampérova zákona odhadněte velikost magnetického pole pole vířivých proudů \vec{B}_v . Podmínku zanedbatelnosti $|\vec{B}_v| \ll |\vec{B}_0|$ přepište do podoby $|F| \ll F_{\text{max}}$. Co je F_{max} zač?

Nakreslíme-li si předpokládané siločáry magnetického pole \vec{H}_2 plošného proudu \vec{j}_1 v plechu, z Ampérova zákona dostaneme, že $|\vec{H}_2| \approx \frac{1}{2} \vec{j}_{\text{plos}}$. Podmínka $|\vec{H}_2| \ll |\vec{H}_0|$ pak dá, že síla jíž magnety působí na plech musí být mnohem menší, než síla, jíž se přitahují navzájem, tedy vlastně nepřekvapivý výsledek.

Pozn. Wolfram Alpha po zadání `StreamPlot {(2*x*y)/(x^2+y^2)^2, (y^2-x^2)/(x^2+y^2)^2}` nakreslí hezký obrázek. (Ano, a Mathematica, na jejíž licenci máte nárok, také.)

Úloha 3

Uvažujte elektromagnetické pole uvnitř krychle vyjádřené v kartézských souřadnicích x, y, z jako součin intervalů $\langle -a/2, a/2 \rangle \times \langle -a/2, a/2 \rangle \times \langle -a/2, a/2 \rangle$. Stěny krychle jsou z dokonale vodivého materiálu a elektrická složka pole uvnitř krychle má tvar

$$\vec{E} = A \sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cos \omega t \vec{e}_x$$

- Nalezněte magnetické pole za předpokladu, že má též harmonický průběh v t .
- Spočtete celkovou energii elektromagnetického pole uvnitř dutiny rezonátoru.
- Pro která ω nezávisí tato energie na čase?
- Spočtete hodnoty Poyntingova vektoru na stěnách krychle.

Řešení

a) Magnetické pole nalezneme z rovnice $\partial_t \vec{B} = -\nabla \times \vec{E}$ za použití $\nabla \times f \vec{e}_x = \nabla f \times \vec{e}_x$, tedy

$$\nabla \times \vec{E} = A \frac{\pi}{a} \left[-\sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \vec{e}_y - 2 \cos\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) \vec{e}_z \right] \cos \omega t .$$

Proto

$$\vec{B} = A \frac{\pi}{\omega a} \left[\sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \vec{e}_y + 2 \cos\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) \vec{e}_z \right] \sin \omega t .$$

b) Energii elektromagnetického pole uvnitř krychle nalezneme integrací její hustoty

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_K (|\vec{E}|^2 + c^2 |\vec{B}|^2) dV$$

Z pozorování, že $\sin^2 x$ i $\cos^2 x$ mají periodu π , vidíme, že každý z kvadrátů sinů či kosinů prostorových souřadnic přispěje svojí střední hodnotou, tedy faktorem $1/2$. Proto

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_K \left(A^2 \frac{1}{4} \cos^2 \omega t + c^2 \left(A \frac{\pi}{\omega a} \right)^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{4} \right) \sin^2 \omega t \right) dV = A^2 a^3 \frac{\epsilon_0}{8} (\cos^2 \omega t + \left(\sqrt{5} \frac{c\pi}{\omega a} \right)^2 \sin^2 \omega t)$$

c) Aby součet nezávisel na čase, musí platit

$$\omega = \sqrt{5} \pi \frac{c}{a} .$$

Protože víme, že zachování energie elektromagnetického pole uvnitř krychle je možné jen za splnění obou evolučních Maxwellových rovnic, nepřekvapí, že tato frekvence vyjde i pokud požaduje aby např. \vec{E} splňovalo vlnovou rovnici.

d) Aby elektromagnetická energie z krychle neutíkala, je nezbytné, aby Poyntingův vektor splňoval $\oint \vec{S} \cdot d\vec{S} = 0$. Tvar zadaného pole \vec{E} zaručuje, že samo elektrické pole a tedy i Poyntingův vektor na čtyřech stěnách vymizí. U dvou stěn, na něž je \vec{E} kolmé sice \vec{S} nevymizí, ovšem protože \vec{S} je kolmé na \vec{E} je ve výsledku Poyntingův vektor rovnoběžný s plochou stěny a představuje jen přesuny energie podél stěny krychle, nikoli ven z ní. Vše souvisí s tím, že uvedené řešení předpokládá nekonečně dobře vodivé stěny chovající se jako dokonalé zrcadlo (jinak by \vec{E} nemohlo být u stěny nulové).