Zápočtová písemka č. 2

`NOFY126` – Klasická elektrodynamika, LS 2023

vzorové řešení

Úloha 1

V laboratorních podmínkách často potřebujeme připravit homogenní magnetické pole. Realizace pomocí (nekonečně) dlouhého solenoidu nemusí být praktická. Ukazuje se však, že dostatečně homogenní pole kolem počátku P lze vytvořit pomocí pouhých dvou kruhových smyček.

Uvažujme konkrétně dvě kruhové smyčky poloměru R_o se společnou osou z, ležící v rovinách $z = \pm z_o$. Ve smyčkách teče stejným směrem proud I. Pro zvolený poloměr R_o nalezněte polohu smyček z_o tak, aby magnetická indukce $\boldsymbol{B}$ na ose z v blízkosti počátku P byla homogenní do druhého řádu, tj. aby

$$\frac{\partial B}{\partial z}\Big|_P = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}\Big|_P = 0\,.$$

(Tip: V této úloze není užitečné počítat vektorový potenciál.)

[11 bodů]

Řešení:

Jedná se o takzvanou Helmholtzovu cívku.

Magnetická indukce na ose od jedné smyčky ležící v $z_o = 0$ (lze spočítat Biot−Savartovým zákonem) je

$$\vec{B}(R = 0, z) = \frac{\mu_o I}{2} \frac{R_o^2}{\sqrt{R_o^2 + z^2}^3}\,\vec{e}_z\,.$$

Z linearity tedy magnetická indukce na ose od dvou souosých smyček $z = \pm z_o$

$$\vec{B}(R = 0, z) = \frac{\mu_o I R_o^2}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{R_o^2 + (z - z_o)^2}^3} + \frac{1}{\sqrt{R_o^2 + (z + z_o)^2}^3} \right) \vec{e}_z\,.$$

Nyní tedy musíme spočítat první a druhou derivaci dle souřadnice z a vyčíslit v počátku.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_z}{\partial z} &= -\frac{\mu_o I R_o^2}{2} 3 \left(\frac{z - z_o}{\sqrt{R_o^2 + (z - z_o)^2}^5} + \frac{z + z_o}{\sqrt{R_o^2 + (z + z_o)^2}^5} \right),\\
\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} &= +\frac{\mu_o I R_o^2}{2} 3 \left(\frac{-5(z - z_o)^2}{\sqrt{R_o^2 + (z - z_o)^2}^7} + \frac{R_o^2 + (z - z_o)^2}{\sqrt{R_o^2 + (z - z_o)^2}^7} + \frac{-5(z + z_o)^2}{\sqrt{R_o^2 + (z + z_o)^2}^7} + \frac{R_o^2 + (z + z_o)^2}{\sqrt{R_o^2 + (z + z_o)^2}^7} \right).
\end{aligned}$$

Po vyčíslení v počátku dostáváme

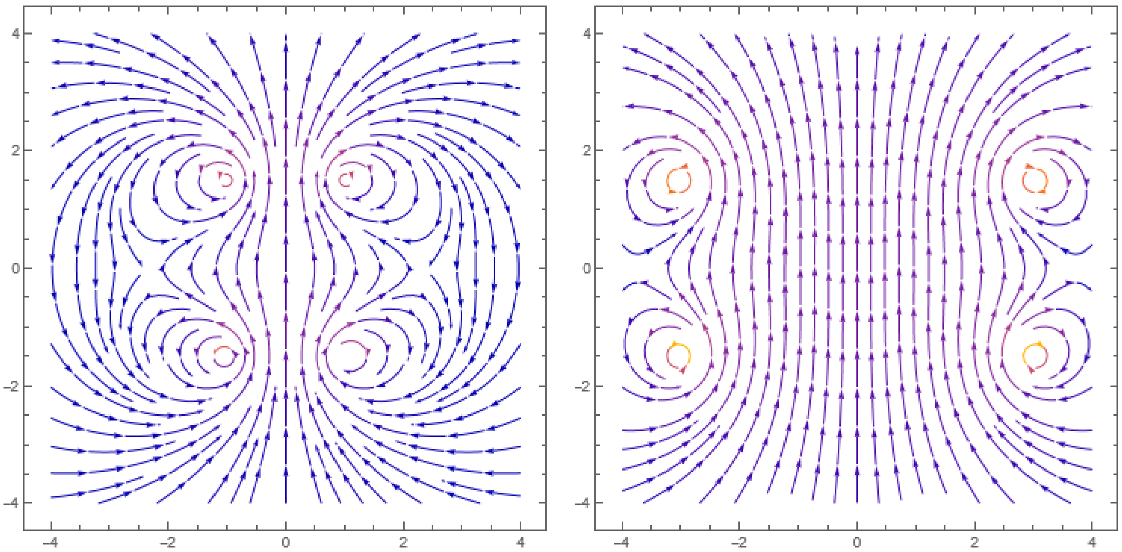
$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_z}{\partial z}\Big|_{z=0} &= 0\,,\\
\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2}\Big|_{z=0} &= \frac{3\mu_o I R_o^2}{\sqrt{R_o^2 + z_o^2}^7} \left[R_o^2 - 4z_o^2\right];
\end{aligned}$$

vyřešením poslední rovnice dostáváme podmínku na poměr poloměru a vzdálenosti smyček

$$\rho_o = 2z_o\,,$$

a výsledná velikost pole v počátku, v centru mezi smyčkami, je

$$\vec{B}(R = 0, z = 0) = \frac{8\mu_o I}{5\sqrt{5}R_o}\,\vec{e}_z\,.$$



Zobrazení siločar magnetického pole pro systém dvou smyček; osa z míří vzhůru, řez ϕ =konst. Vlevo: obecné umístění dvou souosých smyček. Vpravo: Helmholtzova cívka.

Úloha 2

Mějme elektromagnetické pole zadané v cylindrických souřadnicích vztahy

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_{\rm o} R}\,\vec{e}_R\ , \qquad \vec{B} = \frac{I\mu_{\rm o}}{2\pi R}\,\vec{e}_\varphi\ .$$

Nalezněte pole $\vec{E}'$ a $\vec{B}'$ v soustavě pohybující se rychlostí $\vec{v} = v\vec{e}_z$.

Určete Poyntingův vektor $\vec{S}'$.

Za jakých podmínek lze nalézt soustavu, ve které vymizí magnetické pole? Jakému zdroji v tomto případě odpovídá zadané pole?

[11 bodů]

Řešení:

Transformační vztahy pro elektrickou intenzitu $\vec{E}$ a magnetickou indukci $\vec{B}$ jsou

$$E'_\parallel = E_\parallel\ , \qquad \vec{E}'_\perp = \gamma\big(\vec{E}_\perp + \vec{v}\times\vec{B}_\perp\big)\ ,$$
$$B'_\parallel = B_\parallel\ , \qquad \vec{B}'_\perp = \gamma\big(\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}_\perp\big)\ .$$

Zadané pole má pouze příčné složky ($\vec{e}_\parallel = \vec{e}_z$), dostáváme tak $E'_\parallel = 0$, $B'_\parallel = 0$ a

$$\vec{E}' = \gamma\Big(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_{\rm o} R}\,\vec{e}_R + v\frac{I\mu_{\rm o}}{2\pi R}\,\vec{e}_z\times\vec{e}_\varphi\Big) \quad = \frac{\gamma\Big(\lambda - \frac{v}{c^2}I\Big)}{2\pi\varepsilon_{\rm o}R'}\,\vec{e}'_R\ ,$$
$$\vec{B}' = \gamma\Big(\frac{I\mu_{\rm o}}{2\pi R}\,\vec{e}_\varphi - v\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_{\rm o}c^2 R}\,\vec{e}_z\times\vec{e}_R\Big) = \frac{\gamma\big(I - v\lambda\big)\mu_{\rm o}}{2\pi R'}\,\vec{e}'_\varphi\ .$$

Zde jsme využili, že příčné rozměry a směry (R, $\vec{e}_R$ a $\vec{e}_\varphi$) se při transformaci nemění.

Vidíme, že magnetické pole vymizí pokud $I = v\lambda$. Jelikož rychlost musí být menší než rychlost světla, $v < c$, k vynulování magnetického pole musí konstanty λ a I splňovat

$$I < \lambda c\ .$$

V takovém případě dostáváme v soustavě s rychlostí $v_{\rm o} = \frac{I}{\lambda}$ čistě elektrické pole

$$\vec{E}_{\rm o} = \frac{\lambda_{\rm o}}{2\pi\varepsilon_{\rm o}R}\,\vec{e}_R\ , \qquad \lambda_o = \frac{1}{\gamma}\lambda\ .$$

To je pole nabité přímky s klidovou lineární hustotou náboje $\lambda_{\rm o}$. Zadané pole tak odpovídá nabité přímce pohybující se rychlostí $-v_{\rm o}$ ve směru přímky.

Úloha lze též řešit transformací zdrojů. Zadané pole lze identifikovat jako pole odpovídající lineární nábojové hustotě λ a proudu I na ose z. Ty se transformují stejně jako hustota náboje a proudu,

$$\lambda' = \gamma\big(\lambda - \frac{v}{c^2}I\big)\ ,$$
$$I' = \gamma\big(I - v\lambda\big)\ .$$

Opět se jedná o stacionární rozložení náboje a proudu podél osy a jejich pole je dáno

$$\vec{E}' = \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_{\rm o}R'}\,\vec{e}'_R = \frac{\gamma\Big(\lambda - \frac{v}{c^2}I\Big)}{2\pi\varepsilon_{\rm o}R'}\,\vec{e}'_R\ ,$$
$$\vec{B}' = \frac{I'\mu_{\rm o}}{2\pi R'}\,\vec{e}'_\varphi = \frac{\gamma\big(I - v\lambda\big)\mu_{\rm o}}{2\pi R'}\,\vec{e}'_\varphi\ ,$$

což je stejný výsledek jako výše.

Poyntingův vektor je dán

$$\vec{S}' = \varepsilon_{\rm o}c^2\vec{E}'\times\vec{B}' = \frac{\lambda' I'}{(2\pi)^2\varepsilon_{\rm o}R'^2}\vec{e}'_z$$
$$= \frac{\gamma^2\left(\lambda - \frac{v}{c^2}I\right)\left(I - v\lambda\right)}{(2\pi)^2\varepsilon_{\rm o}R'^2}\vec{e}'_z = \frac{\lambda I(c^2+v^2) - v(c^2\lambda^2 + I^2)}{(2\pi)^2\varepsilon_{\rm o}R'^2(c^2-v^2)}\vec{e}'_z\ .$$

Úloha 3

Mějme deskový ohmický vodič tlouštky $2a$ od kterého na obě strany ve vzdálenosti d leží rovnoběžně tenké ideální vodivé desky. Všechny tři desky leží rovnoběžně s rovinou $x = 0$ a ohmická deska je kolem této roviny vycentrovaná. Nechť jsou všechny tři desky omezeny do poloprostoru $z > 0$ a nechť jsou v rovině $z = 0$ spojeny ideálně vodivou deskou. Ve směrech $z > 0$ a y desky sahají dostatečně daleko, abychom je mohli považovat za nekonečné. Ideálně vodivé desky můžeme považovat za uzemněné.

Ke vzdálenému konci ohmického vodiče ve směru osy z je připojen zdroj napětí tak, že pro $z = \ell$ je mezi ohmickým vodičem a ideálně vodivými deskami napětí V. Díky tomuto napětí bude v ohmickém vodiči téct ve směru osy z proud $\vec{j}$ a v ideálně vodivých deskách plošný proud $\vec{\iota}$. Proud ve směru osy y neuvažujte.

Vodivost ohmického vodiče je γ.

(i) Určete elektrické pole $\vec{E}$ uvnitř ohmického vodiče.
(Tip: Díky symetrii úlohy můžete uhádnout tvar hustoty proudu $\vec{j}$ ve vodiči a nalézt odpovídající elektrickou intenzitu $\vec{E}$. Okomentujte splnění všech relevantních rovnic.)

Řešení:

Proud zjevně

$$\vec{j} = -j\vec{e}_z = \text{konst.}\,.$$

Z Ohmova zákona, psaného jako $\vec{j} = \gamma \vec{E}_\text{o}$ dostáváme

$$\vec{E}_\text{o} \equiv E_\text{o}\vec{e}_z = -\frac{1}{\gamma}\, j\, \vec{e}_z = \text{konst.}\,, \qquad E_\text{o} = \frac{j}{\gamma}\,,$$

a tedy Maxwellovy rovnice

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\text{o} = 0\,, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E}_\text{o} = 0$$

jsou splněny.

(ii) Nalezněte skalární potenciál uvnitř ohmického vodiče.
Určete vztah napětí V, intenzity E a proudové hustoty j.

Řešení:

Z definice skalárního potenciálu a okrajové podmínky

$$\vec{E}_\text{o} = -\vec{\nabla}\phi\,, \qquad \phi\Big|_{z=0} = 0\,,$$

snadno dostaneme v kartézských souřadnicích

$$\phi = \frac{j}{\gamma}\, z\,.$$

Na ideálně vodivých deskách máme $\phi = 0$ a tedy rozdíl potenciálů

$$\triangle\phi = \phi_\text{ohmický vodič} - \phi_\text{ideální vodič} = \frac{j}{\gamma}\, z\,.$$

Pro $z = l$, tedy v místě připojení zdroje napětí, dostáváme

$$V = \frac{j}{\gamma}\, l = E_\text{o} l\,, \qquad j = \gamma\,\frac{V}{l} = \gamma E_\text{o}\,, \qquad E_\text{o} = \frac{j}{\gamma} = \frac{V}{l}\,.$$

(iii) Nalezněte skalární potenciál v dutinách mezi ohmickým vodičem a ideálními vodiči.
(Tip: Řešení hledejte v separované podobě. Díky symetrii úlohy závislost na směru y nemusíte uvažovat. Je potřeba splnit rovnici pro potenciál a hraniční podmínky.)

Řešení:

Úloha je symetrická vůči zrcadlení podél roviny $x = 0$. Budeme ji proto řešit pro $x > 0$, pro $x < 0$ je řešení analogické.

Naším úkolem je tedy řešit Laplaceovu rovnici

$$\Delta\phi = 0\,,$$

pro ansatz v separovaném tvaru

$$\phi = \mathcal{X}(x)\mathcal{Z}(z)$$

s okrajovými podmínkami

$$\mathcal{X}(a)\mathcal{Z}(z) = E_\mathrm{o} z\,, \qquad \mathcal{X}(a+d)\mathcal{Z}(z) = 0\,.$$

Z podmínek na hranici ohmického vodiče dostáváme

$$\mathcal{Z}(z) = E_\mathrm{o} z\,, \qquad \mathcal{X}(a) = 1$$

a z podmínek na hranici ideálního vodiče

$$\mathcal{X}(a+d) = 0\,.$$

Laplaceova rovnice v kartézských souřadnicích na ansatz v separovaném tvaru se redukuje následovně

$$\Delta\phi = \Delta\big(\mathcal{X}(x)E_\mathrm{o} z\big) = \mathcal{X}''(x)\,E_\mathrm{o} z = 0\,.$$

Musí tedy platit $\mathcal{X}''(x)$ a $\mathcal{X}$ je lineární funkce x. Abychom splnili okrajové podmínky dostáváme

$$\mathcal{X}(x) = -\frac{1}{d}\,x + 1 + \frac{a}{d} = \frac{d+a-x}{d} \qquad \text{pro } a < x < a+d\,.$$

Celkově tedy

$$\phi = E_\mathrm{o}\frac{d+a-x}{d}\,z \qquad \text{pro } a < x < a+d\,.$$

(iv) Nalezněte elektrické pole $\vec{E}$ v dutinách mezi ohmickým a ideálními vodiči.

Řešení:

Triviálně

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = E_\mathrm{o}\frac{z}{d}\,\vec{e}_x - E_\mathrm{o}\frac{d+a-x}{d}\,\vec{e}_z \qquad \text{pro } a < x < a+d\,.$$

(v) Nalezněte magnetické pole $\vec{B}$ v dutinách mezi ohmickým a ideálními vodiči.
(Tip: Ze symetrie úlohy a směru proudu uhádněte podobu magnetické indukce $\vec{B}$ a pomocí Ampérova zákona určete její velikost.)

Řešení:

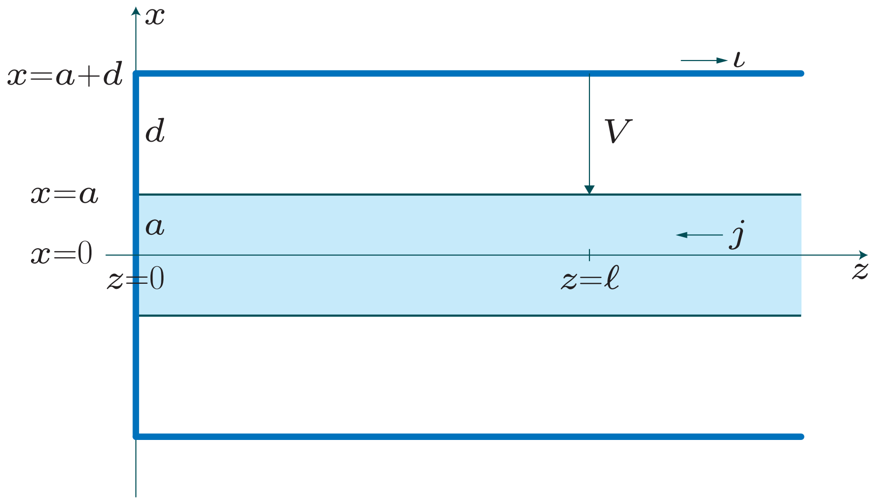
Ampérův zákon říká, že magnetické pole směruje kolem proudu. Ze symetrie úlohy tak máme

$$\vec{B} = \begin{cases} B_\mathrm{o}\,\vec{e}_y & \text{pro} \quad a < x < a+d\,, \\ -B_\mathrm{o}\,\vec{e}_y & \text{pro} \quad -(a+d) < x < -a\,. \end{cases}$$

Pro aplikaci Ampérova zákona uvažujme obdélníkovou smyčku smyčku v z =konst, se stranou ve směru y délky $\triangle y$. Obě strany ve směru y umístíme v dutinách na opačných stranách ohmického vodiče - viz obrázek. Ampérův zákon pak říká

$$2B_\mathrm{o}\Delta y = \mu_\mathrm{o} 2a\Delta y j$$
$$\Downarrow$$
$$B_\mathrm{o} = \mu_\mathrm{o} a j = \frac{\mu_\mathrm{o}}{j} a E_\mathrm{o} = \frac{\mu}{j}\frac{a}{l}V\,.$$

[11 bodů]



Uspořádání vodivých desek. Řez y = konst. Ohmický vodič je naznačen světle modře, ideální vodiče tmavě modře.

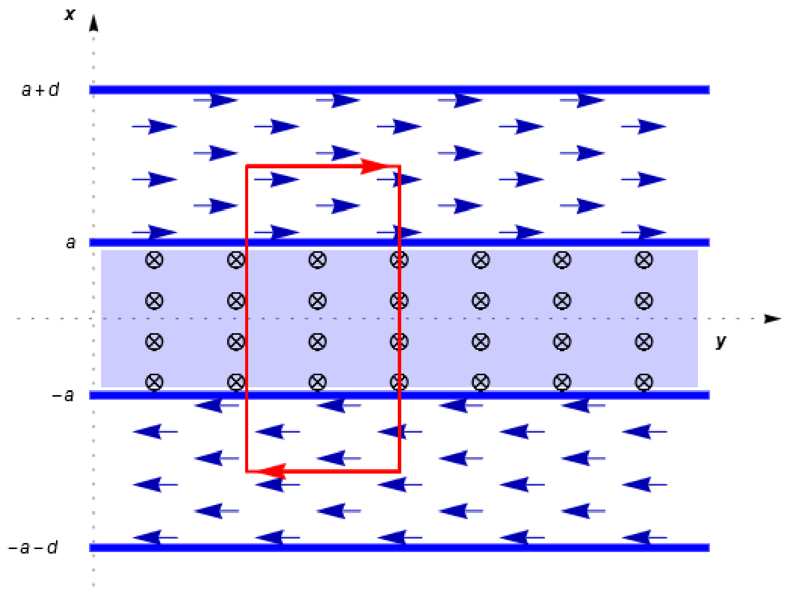


Schéma uzavřené smyčky (tvořící orientovanou hranici oblasti vymezené červeným obdélníkem) pro aplikaci Ampérova zákona na řezu z =konst. Modré šipky značí magnetickou indukci $\vec{B}$. Proud $\vec{j}$ teče kolmo do roviny (x, y) v ohmickém vodiči (naznačeném bledě modrou barvou).