Zápočtový problém č. 1

NOFY126 – Klasická elektrodynamika, LS 2023

vzorové řešení

Část 1

Mějme potenciál

$$\phi_{\text{uvn}} = K\Big(\frac{R^2}{A^2} + \frac{z^2}{B^2} + \gamma\Big) ,$$

kde (R, φ, z) *jsou cylindrické souřadnice a* K, A, B, γ *konstanty.*

1) ***Nalezněte, jakým nábojový rozložením je tento potenciál vytvořen. Neboli, určete nábojovou hustotu*** ρ***.***

Nejprve nalezneme vektor eletrické intenzity a z něj posléze spočteme divergenci, ekvivalentně přímo zapůsobíme Laplaceovým operátorem na potenciál.

V kartézských souřadnicích

$$\begin{aligned}
\phi_{\text{uvn}} &= K\left(\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} + \frac{z^2}{B^2} + \gamma\right) ,\\
\vec{E}_{\text{uvn}} &= -2K\left(\frac{x}{A^2}\vec{e}_x + \frac{y}{A^2}\vec{e}_y + \frac{z}{B^2}\vec{e}_z\right) ,\\
\rho_{\text{uvn}} &= \varepsilon_{\text{o}}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_{\text{uvn}} = -2K\varepsilon_{\text{o}}\left(\frac{2}{A^2} + \frac{1}{B^2}\right) = \text{konst} .
\end{aligned}$$

V cylindrických souřadnicích

$$\begin{aligned}
\rho_{\text{uvn}} &= -\varepsilon_{\text{o}}\triangle\phi_{\text{uvn}} = -\frac{\varepsilon_{\text{o}}}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\phi_{\text{uvn}}}{\partial R}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\phi_{\text{uvn}}}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\phi_{\text{uvn}}}{\partial z}\right)\right]\\
&= -\frac{K\varepsilon_{\text{o}}}{R}\left[\frac{4R}{A^2} + 0 + \frac{2R}{B^2}\right] = -2K\varepsilon_{\text{o}}\left(\frac{2}{A^2} + \frac{1}{B^2}\right) = \text{konst} .
\end{aligned}$$

Hustota náboje je tedy konstatní, nezávislá na poloze.

2) ***Jaký tvar mají ekvipotenciály tohoto pole?***

$$\phi_{\text{uvn}} = K\Big(\frac{R^2}{A^2} + \frac{z^2}{B^2} + \gamma\Big) = \text{konst} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{R^2}{A^2} + \frac{z^2}{B^2} = c^2 = \text{konst} .$$

Ekvipotenciály jsou rotačními elipsoidy o poloosách Ac a Bc.

Část 2

Hledejme axiálně symetrické bezezdrojové pole ϕ *a to metodou separací proměnných v oblých elipsoidálních souřadnicích* (η, ψ, φ)*. Jelikož je pole bez zdrojů, splňuje*

$$\triangle\phi = 0 .$$

Axiální symetrie znamená nezávislost na souřadnici φ*. Uvažujte tedy pole ve tvaru*

$$\phi = \mathcal{R}(\eta)\,\mathcal{P}(\psi) .$$

3) ***Nalezněte separované rovnice pro** $\mathcal{R}(\eta)$ **a** $\mathcal{P}(\psi)$**. Separační konstantu nazvěte** $l(l+1)$**.***

Oblé elipsoidální souřadnice jsou definovány

$$\mathrm{R} = a \operatorname{ch}\eta \sin\psi\,, \quad z = a \operatorname{sh}\eta \cos\psi\,,$$

patričné Laméovy koeficienty jsou

$$h_\eta = h_\psi = a\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta - \sin^2\psi}\,, \quad h_\varphi = a \operatorname{ch}\eta \sin\varphi$$

Nyní tedy dosadíme do Laplaceovy rovnice potenciál ve tvaru $\phi = \mathcal{R}(\eta)\,\mathcal{P}(\psi)$.

$$\begin{aligned}
\triangle\phi &= \frac{1}{h_\eta h_\psi h_\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\psi h_\varphi}{h_\eta}\frac{\partial\mathcal{R}(\eta)}{\partial\eta}\right)\mathcal{P}(\psi) + \mathcal{R}(\eta)\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{h_\eta h_\varphi}{h_\psi}\frac{\partial\mathcal{P}(\psi)}{\partial\psi}\right)\right] = 0\,,\\
\frac{h_\eta h_\psi}{\phi}\triangle\phi &= \underbrace{\frac{1}{\mathcal{R}(\eta)\operatorname{ch}\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\operatorname{ch}\eta\frac{\partial\mathcal{R}(\eta)}{\partial\eta}\right)}_{l(l+1)} + \underbrace{\frac{1}{\mathcal{P}\sin\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\sin\psi\frac{\partial\mathcal{P}(\psi)}{\partial\psi}\right)}_{-l(l+1)} = 0\,.
\end{aligned}$$

Dostáváme máme dvě separované rovnice

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\operatorname{ch}\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\operatorname{ch}\eta\frac{\partial\mathcal{R}(\eta)}{\partial\eta}\right) - l(l+1)\mathcal{R}(\eta) = 0\,,\\
\frac{1}{\sin\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\sin\psi\frac{\partial\mathcal{P}(\psi)}{\partial\psi}\right) + l(l+1)\mathcal{P}(\psi) = 0\,.
\end{aligned}$$

4) ***Napište tyto rovnice v proměnných** $s = \operatorname{sh}\eta$ **a** $u = \cos\psi$**, tj., rovnice pro funkce** $R(s)$ **a** $P(u)$**, kde** $\mathcal{R}(\eta) = R(\operatorname{sh}\eta)$ **a** $\mathcal{P}(\psi) = P(\cos\psi)$**.***

Rovnice pro $P(u)$ by vám měla vyjít Legendrova rovnice. Řešení by tak měla mít tvar Legendrových polynomů diskutovaných na přednášce: $P(u) = \mathsf{P}_l(u) \equiv \mathsf{P}_l^0(u)$. Regularita na osách vyžaduje $l \in \mathbb{N}_0$.

Jednodimenzionální transformace souřadnic je relativně triviální

$$\begin{aligned}
&s = \operatorname{sh}\eta && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\eta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} = \operatorname{ch}\eta\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} && \Longrightarrow && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\operatorname{ch}\eta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\,,\\
&u = \cos\psi && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\psi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} = -\sin s\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} && \Longrightarrow && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} = -\frac{1}{\sin\psi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi}\,.
\end{aligned}$$

Použitím v právě odvozených rovnicích dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\operatorname{ch}\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\operatorname{ch}^2\eta\,\frac{1}{\operatorname{ch}\eta}\frac{\partial\mathcal{R}(\eta)}{\partial\eta}\right) - l(l+1)\mathcal{R}(\eta) = 0\\
\Downarrow\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\left(1+s^2\right)\frac{\mathrm{d}\mathcal{R}(s)}{\mathrm{d}s}\right] - l(l+1)\mathcal{R}(s) = 0
\end{aligned}$$

a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[\left(1-u^2\right)\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}s}\right] - l(l+1)\mathcal{P} = 0\,.$$

5) ***Ověřte, že funkce studovaná na přednášce v kontextu vodivého elipsoidu***

$$\mathsf{q}_0(s) = \operatorname{arccot} s$$

splňuje rovnici pro** $R(s)$ **s hodnotou separační konstanty** $l = 0$**. Pro jaké** $l = l_\mathrm{o}$ **splňuje tuto rovnici funkce

$$\mathsf{q}_{l_\mathrm{o}}(s) = \frac{1}{2}\left(1+3s^2\right)\operatorname{arccot} s - \frac{3}{2}s\ ?$$

Zde funkce** $\operatorname{arccot} s$ **nabývá hodnot z intervalu** $(0,\pi)$ **a tedy** $\operatorname{arccot} 0 = \frac{\pi}{2}$**.

Dosadíme za $R(s) = \operatorname{arccot} s$ do separované rovnice

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\left(1+s^2\right)\frac{\mathrm{d}\operatorname{arccot} s}{\mathrm{d}s}\right] - l(l+1)\operatorname{arccot} s = 0\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\left(1+s^2\right)\frac{1}{1+s^2}\right] - l(l+1)\operatorname{arccot} s = 0\\
l(l+1) = 0\,.
\end{aligned}$$

Vidíme, že nezáporné řešení je vskutku $l = 0$

Pro funkci $\mathsf{q}_{l_\mathrm{o}}(s)$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\left(1+s^2\right)\frac{\mathrm{d}\mathsf{q}_{l_\mathrm{o}}(s)}{\mathrm{d}s}\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\left(1+s^2\right)\left(3s\operatorname{arccot} s - \frac{1}{2}\frac{1+3s^2}{1+s^2} - \frac{3}{2}\right)\right]\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[3\left(1+s^2\right)s\operatorname{arccot} s - 3s^2 - 2\right]\\
&= 3(1+3s^2)\arccos s - 3s - 6s\\
&= 6\left[\frac{1}{2}\left(1+3s^2\right)\operatorname{arccot} s - \frac{3}{2}s\right]\\
&= 6\mathsf{q}_{l_\mathrm{o}}(s)
\end{aligned}$$

Což splňuje rovnici pro separační konstantu $l = l_\mathrm{o} = 2$.

Uvažujme nyní potenciál

$$\phi_\mathrm{ven} = K_0\,\mathsf{q}_0(\operatorname{sh}\eta)\,\mathsf{P}_0(\cos\psi) + K_{l_\mathrm{o}}\,\mathsf{q}_{l_\mathrm{o}}(\operatorname{sh}\eta)\,\mathsf{P}_{l_\mathrm{o}}(\cos\psi)\;,$$

kde za l_o užijeme právě určenou hodnotu. Postupem výše jsme ověřili, že ϕ_ven splňuje Laplaceovu rovnici všude mimo disk $\eta = 0$. Na disku nejsou totiž elipsoidální souřadnice hladké. Souřadnice ψ nenavazuje na sebe spojitě z obou stran disku – na horní straně disku máme $\psi \in (0, \frac{\pi}{2})$ a na dolní straně $\psi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Na disku lze proto očekávat problematické chování pole.

6) ***Ověřte, že potenciál ϕ_ven je na disku spojitý, ale normálová složka intenzity je nespojitá. Určete plošnou nábojovou hustotu σ na disku.***

Máme tedy potenciál

$$\phi_\mathrm{ven} = K_0\,\mathsf{q}_0(\operatorname{sh}\eta)\,\mathsf{P}_0(\cos\psi) + K_2\,\mathsf{q}_2(\operatorname{sh}\eta)\,\mathsf{P}_2(\cos\psi)\;,$$

a z definice Legendreových polynomů

$$\mathsf{P}_0(u) = 1\,,\qquad \mathsf{P}_2 = \frac{1}{2}\left(3u^2 - 1\right)\;.$$

Na disku $\eta = 0$ můžeme psát

$$\phi_\mathrm{ven}\Big|_{\eta=0} = \frac{\pi}{2}\left(K_0 + \frac{1}{4}K_2\left(3\cos^2\psi - 1\right)\right)\;.$$

Body na horní části disku mají $\psi_+ \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$, úhlová souřadnice téhož bodu na disku z dolní části je ovšem $\psi_- = \pi - \psi_+$. Díky $\cos^2\psi_+ = \cos^2\psi_-$ dostáváme spojitost potenciálu

$$\phi_\mathrm{ven}\Big|_{\substack{\eta=0\\ \psi=\psi_+}} = \phi_\mathrm{ven}\Big|_{\substack{\eta=0\\ \psi=\psi_-}}\;.$$

Složka elektrické intenzity ve směru $\vec{e}_\eta$ je dána

$$\begin{aligned}
E^\eta_\mathrm{ven} = \vec{E}_\mathrm{ven}\cdot\vec{e}_\eta &= -\frac{1}{h_\eta}\frac{\partial\phi_\mathrm{ven}}{\partial\eta}\\
&= \frac{1}{a\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta - \sin^2\psi}}\left[K_0\frac{1}{\operatorname{ch}\eta} + K_2\left(\frac{2+3\operatorname{sh}^2\eta}{\operatorname{ch}\eta} - 3\operatorname{sh}\eta\,\operatorname{ch}\eta\,\operatorname{arccot}\operatorname{sh}\eta\right)\frac{1}{2}\left(3\cos^2\psi - 1\right)\right]\\
&= \frac{1}{a\sqrt{1-\sin^2\psi}}\left[K_0 - K_2 + 3K_2\cos^2\psi\right]\\
&= \frac{1}{a}\left[\frac{K_0 - K_2}{|\cos\psi|} + 3K_2|\cos\psi|\right]\;.
\end{aligned}$$

Nyní je třeba zvolit normálu $\vec{n} = \vec{e}_z$:

$$\text{nad diskem} \quad \vec{n} = +\vec{e}_\eta \quad \Rightarrow \qquad \vec{n}\cdot\vec{E}_{\text{ven}} = +E^\eta_{\text{ven}}\Big|_{\eta=0}$$

$$\text{pod diskem} \quad \vec{n} = -\vec{e}_\eta \quad \Rightarrow \qquad \vec{n}\cdot\vec{E}_{\text{ven}} = -E^\eta_{\text{ven}}\Big|_{\eta=0}$$

Plošná hustota náboje je tedy, po započítání příspěvku z obou stran

$$\sigma = \varepsilon_o \vec{n}\cdot\Delta\vec{E}_{\text{ven}} = 2\frac{\varepsilon_o}{a}\left[\frac{K_0 - K_2}{|\cos\psi|} + 3K_2|\cos\psi|\right] .$$

Zde paramterizujeme disk jen pomocí $\psi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

7) ***Pro jaké K_0 a K_{l_o} je tato hustota všude konečná (včetně okraje disku)? Vyjádřete tyto konstanty pomocí celkového náboje Q na disku.***

Na krajích disku $\cos\psi \to 0$ a tedy potřebujeme $K_2 = K_0$. Pak dostáváme

$$\sigma = 6K_2\frac{\varepsilon_o}{a}|\cos\psi| ,$$

kde $\psi \in (0, \pi/2)$.

Celkový náboj získáme integrací přes celý disk

$$Q = \int \sigma\,\mathrm{d}S .$$

V elipsoidálních souřadnicích máme

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S &= h_\eta h_\varphi\,\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\varphi \\
&= a^2\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta - \sin^2\psi}\,\operatorname{ch}\eta\sin\psi\,\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\varphi \\
&\underset{\eta=0}{=} a^2|\cos\psi|\sin\psi\,\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{6\varepsilon_o K_2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} |\cos\psi|\; a^2\,|\cos\psi|\;\sin\psi\;\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\varphi \\
&= 12\pi\varepsilon_o a K_2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\psi\;\sin\psi\;\mathrm{d}\psi \\
&= 12\pi\varepsilon_o a K_2\int_0^1 u^3\,\mathrm{d}u \\
&= 4\pi\varepsilon_o a K_2 .
\end{aligned}$$

Celkový potenciál tedy lze zapsat

$$\phi_{\text{ven}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o a}\left[\operatorname{arccot}\operatorname{sh}\eta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(1+3\operatorname{sh}^2\eta\right)\operatorname{arccot}\operatorname{sh}\eta - \frac{3}{2}\operatorname{sh}\eta\right)\left(3\cos^2\psi - 1\right)\right] .$$

Komentář

Diskutovaná pole lze využít při studiu pole homogenně nabitého elipsoidu, jehož hranice je dána $\eta = \eta_o$. To znamená oblého rotačního elipsoidu o hlavní poloose $a \operatorname{ch} \eta_o$ a vedlejší poloose $a \operatorname{sh} \eta_o$. Potenciál ϕ_{ven} odpovídá poli vně elipsoidu, v oblasti $\eta > \eta_o$, a potenciál ϕ_{uvn} poli uvnitř, $\eta < \eta_o$. Konstanty K, A, B, γ ve výrazu pro ϕ_{uvn} lze zvolit tak, aby na povrchu elipsoidu na sebe spojitě navazoval jak potenciál, tak intenzita. Určení těchto konstant je přímočaré, ale výpočetně náročné. Pokud se pokusíte si je dopočítat, mělo by vám např. vyjít

$$K = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o a}\,, \quad \gamma = \frac{3}{2} \operatorname{arccot} \operatorname{sh} \eta_o\,.$$

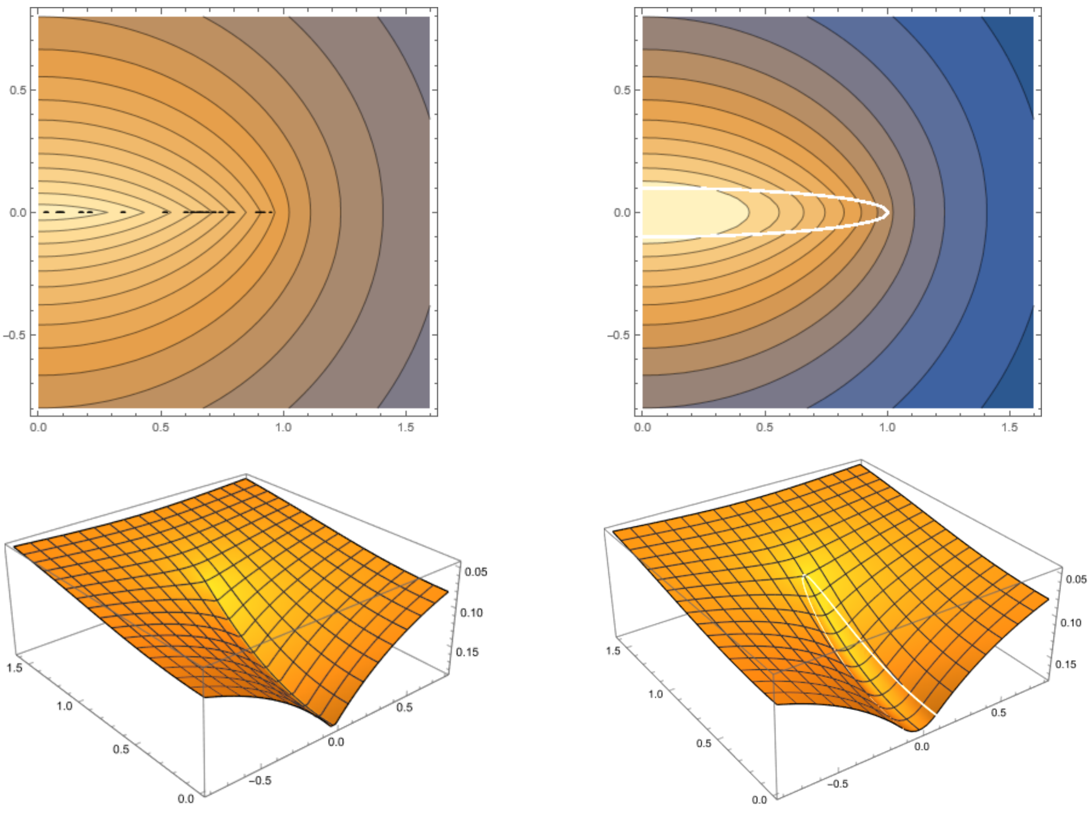
Konstanty A^{-2} a B^{-2} nejsou o moc složitější než γ.

Chceme-li navázat ϕ_{uvn} a ϕ_{ven} tak aby nejen celkový potenciál ϕ ale i elektricá intenzita $\vec{E}$ byla spojitá musíme volit

$$K = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o a}\,, \qquad \gamma = \frac{3}{2} \operatorname{arccot} \operatorname{sh} \eta_0\,,$$

$$A^{-2} = a^{-2}\frac{3}{4}\left[\frac{\operatorname{sh}\eta_0}{\operatorname{ch}\eta_0} - \operatorname{arccot}\operatorname{sh}\eta_0\right]\,, \quad B^{-2} = a^{-2}\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{\operatorname{sh}\eta_0} + \operatorname{arccot}\operatorname{sh}\eta_0\right]\,.$$

Poznamenejme ještě, že povrch elipsoidu $\eta = \eta_o$ není *ekvipotenciálou zkoumaného pole.*



Obrázek 1: Vlevo je znázorněn potenciál ϕ_{ven} a jeho ekvipotenciály, uvažovaný v celém prostoru. Na disku $z = 0$, $R < a$ je patrná nespojitost derivace odpovídající plošné hustotě náboje σ.
Napravo je znázornění napojení potenciálu ϕ_{uvn} uvnitř homogenně nabitého elipsoidu $\eta < \eta_o$ a vnějšího řešení ϕ_{ven}. Jak potenciál, tak jeho derivace, jsou na napojení spojité.