RNDr. Jan Prokleška, Ph.D.
prokles@mag.mff.cuni.cz
95155 2772
`kfes.troja.mff.cuni.cz/fyzikaIV`

cvičení FIV 24.2.2022

2.1 *Nalezněte prvky symetrie následujících molekul: etan (C_2H_6), eten (C_2H_4), voda (H_2O), kyselina chlorná (HClO), oxid - tetrafluorid xenonový ($XeOF_4$), amoniak (NH_3)*

- C_2H_6 viz pdf poznámky k řešení
- C_2H_4

D_{2h}: identita, tři dvojčetné osy, inverze, tři roviny zrcadlení

- H_2O

C_{2v}: identita, dvojčetná osa, dvě vertikální roviny zrcadlení

- HClO

C_s: identita, horizontální rovina zrcadlení

- $XeOF_4$

C_{4v}: identita, čtyřčetná osa, dvojčetná osa, čtyři vertikální roviny symetrie

- NH_3

C_{3v}: identita, trojčetná osa, tři vertikální roviny zrcadlení

2.2 *Zapište pomocí matic předpis pro následující základní prvky symetrie: C_4, σ_y; ilustrujte použití na příkladech. V maticové representaci dokažte, že $C_2 \cdot \sigma_z = \mathrm{i}$.*

Matici určíme buď z geometrické představy (při C_4 osa y přechází na $-x$ a x na y) anebo pomocí vztahů pro transformaci souřadnic — obecně pro C_n platí

$$C_n = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & 0 \\ -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a tedy} \quad C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Při zrcadlení kolmo na osu y přechází y na $-y$, tj.

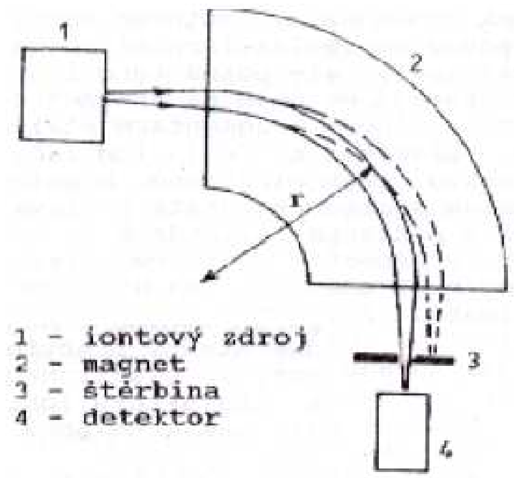
$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stejně jako výše určíme C_2 a σ_z a vynásobením dostaneme

$$C_2 \cdot \sigma_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

což je maticový předpis pro identitu.

2.3 *Nalezněte podmínku pro poměr m/q částic dopadajících na detektor. Uvažujte homogenní magnetické pole*[1] *indukce B a částice (ionty) urychlené ve zdroji akceleračním napětím V.*
(hmotnostní spektrometr)



Na částici působí dostředivá a odstředivá síla, pro které platí $F_\mathrm{d} = Bqv$ (skalární zápis $\vec{F}_\mathrm{d} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ pro naši geometrii) a $F_\mathrm{o} = \frac{mv^2}{r}$, kde rychlost určíme z kinetické energie částice $E_\mathrm{kin} = \frac{mv^2}{2} = qU$. Z požadované rovnosti sil dostáváme

$$\frac{m}{q} = \frac{B^2 r^2}{2U}$$

2.4 *Ukažte, že pětičetná osa symetrie není slučitelná s translační periodicitou mříže.*

Vzhledem k povaze problému řešme v rovině kolmé na hledanou osu symetrie. Vyberme si řadu mřížových bodů vzdálených mezi sebou a (translační perioda). Uvažme v každém z těchto bodů obecnou n–četnou osu. Vyberme si dva sousední body, n–četné osy procházející těmito body opakují translace a po $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ stupních na obě strany. Má-li být takto vzniklá mříž symetrická vůči těmto osám, musí se 'pootočené' konce shodovat s mřížovými body, tj. jejich vzájemná vzdálenost musí být celým násobkem translační periody a.
Pro možné hodnoty úhlu α tedy musí platit

$$ma = a + 2a\cos(\alpha),$$

kde m je celé číslo, hodnoty kterých může nabývat jsou omezeny cosinem na interval $\langle -1, 3 \rangle$ a je tedy omezena i translační symetrií dovolená četnost rotační osy:

m	-1	0	1	2	3
α	π	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$0(2\pi)$
n	2	3	4	6	1

tj. pětičetná osa se neshoduje s translační symetrií mříže.

[1] kolmé na rovinu nákresu