ZDROJ THEORIE; CITOVAT V TEXTU LITER...
VLIVY OKOLNÍCH PODMÍNEK; CHYBY n = (±)...

Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF

Fyzikální praktikum I (NOFY066)

Úloha č. XXI

Název úlohy: Měření tíhového zrychlení

Jméno: ***Josef Kučera*** Obor: ***FOF***

Datum měření: 5.4.2019 Datum odevzdání: 9.4.2019

Připomínky opravujícího:

1) Poznámky v textu
2) V celé úloze nejsou řešeny chyby měření!!!
3) Diskuse se zabývá pouze porovnáním hodnot a nikoli vlivy na měření.

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0 - 3	2
Teoretická část	0 - 2	2
Výsledky a zpracování měření	0 - 9	5,5
Diskuse výsledků	0 - 4	2
Závěr	0 - 1	1
Seznam použité literatury	0 - 1	0,5
Celkem	max. 20	13

Posuzoval: [illegible] dne: 15.4.2019

NEDOPORUČUJI – PŘETÁHL JSEM S NÍ PRAKTIKA O $\frac{1}{2}$ HODINY

Pracovní úkol

1. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou matematického kyvadla.
2. Změřte závislost doby kmitu fyzického kyvadla na poloze čočky. Měření proveďte pro obě osy otáčení. Graficky znázorněte.
3. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou reverzního kyvadla.
4. Vypočítejte chybu, které se dopouštíte idealizací reálného kyvadla v rámci modelu kyvadla matematického. Srovnejte moment setrvačnosti reálného kyvadla s jeho matematickou idealizací.
5. Vypočítejte vzdálenost těžiště reálného kyvadla od osy otáčení a porovnejte s délkou matematického kyvadla.

Theorie

+ zdroj

Měření tíhového zrychlení z doby kmitu kyvadla

Pro dobu kmitu T fyzického kyvadla platí:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \tag{1}$$

kde I je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení, m je hmotnost kyvadla, g je místní tíhové zrychlení, d je vzdálenost těžiště od osy otáčení, a je maximální úhlová výchylka těžiště z rovnovážné polohy.

Moment setrvačnosti mathematického kyvadla jest dán vztahem:

$$I = ml^2 \tag{2}$$

kde m jest hmotnost hmotného bodu na konci nehmotného závěsu délky l.

Dobu kmitu matematického kyvadla T_M určíme z rovnice (1). Platí:

$$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \tag{3}$$

Omezíme-li se na malé výchylky z rovnovážné polohy, je doba kmitu matematického kyvadla:

$$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{4}$$

Z měření doby kmitu pak můžeme určit místní tíhové zrychlení:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{{T_M}^2} \tag{5}$$

Pro moment setrvačnosti homogenní koule poloměru r vůči ose procházející těžištěm platí:

$$I_{0koule} = \frac{2}{5} m_k r^2 \tag{6}$$

Moment setrvačnosti homogenní tyče délky L vzhledem k ose kolmé k délce tyče a procházející těžištěm lze vyjádřit vztahem:

$$I_{0tyč} = \frac{1}{12} m_t L^2 \tag{7}$$

Moment setrvačnosti tělesa I vzhledem k libovolné ose otáčení je podle Steinerovy věty roven momentu setrvačnosti tělesa hmotnosti M, soustředěné v těžišti, zvětšenému o moment setrvačnosti I_0tělesa vzhledem k ose rovnoběžné, procházející těžištěm.

$$I = I_0 + Ma^2 \tag{8}$$

kde a je vzájemná vzdálenost obou os.

Reversní kyvadlo

Nalezneme-li pro kyvadlo dvě rovnoběžné osy, kolem kterých kývá kyvadlo se stejnou dobou kmitu a leží-li tyto osy v rovině procházející těžištěm tak, že jejich poloha vzhledem k těžišti není symetrická, pak vzdálenost těchto os je redukovanou délkou kyvadla l_r. Pro dobu kmitu fyzického kyvadla platí:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}} \tag{9}$$

Výsledky měření

Mathematické kyvadlo

Pro fyzické kyvadlo (ocelovou kuličku na polymerovém vlákně), které nám sloužilo jako aproximace mathematického kyvadla, byly změřeny následující hodnoty:

m_k = 62,5005 ± 0,001 g

m_p = 0,5414 ± 0,001 g

Kde m_k jest hmotnost ocelové kuličky a m_p jest hmotnost provázku.

V tabulce 1 jsou pak údaje týkající se délky – délka provázku l_P, výška háčku h_h, průměr ocelové koule d_k a průměr závěsu d_z.

Tabulka 1: Naměřené délky

l_P [mm]	h_h [mm]	d_k [mm]	d_z [mm]
990,0	7,07	26,21	7,90

+ přesnosti měření

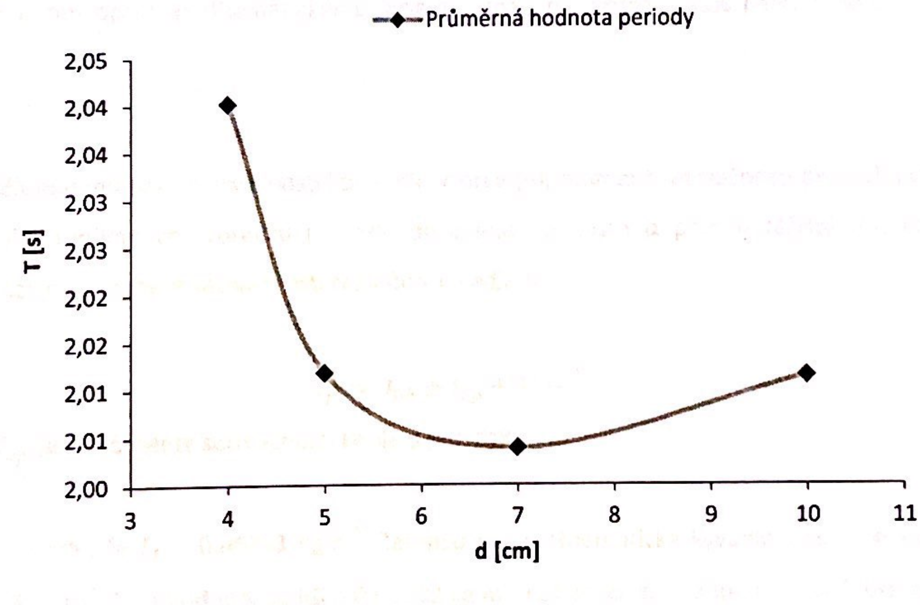
Při měření délky periody kyvadla, si musíme dát pozor na počáteční výchylku. Pokud je příliš malá, měření jest zkresleno v důsledku stínění ocelové kuličky. Pokud je naopak příliš velká, koliduje nám s naší podmínkou co nejmenšího výkyvu ve vzorečku (4).

Různé průměrné délky period T pro různé počáteční výchylky d jsou vyneseny v tabulce 2, kde k jest počet period:

Tabulka 2: Měření délky periody pro různé výchylky

d [cm]	k	t [s]	t_e [s]	T [s]
4	5	10,2009	± 0,0001	2,0402
5	5	10,0589	± 0,0001	2,0118
7	5	10,0192	± 0,0001	2,0038
10	5	10,0572	± 0,0001	2,0114

Data z tabulky 2 si vyneseme do grafu:



Graf 1: Závislost délky periody na počátečním výkyvu

Z tohoto grafu můžeme vyčíst, že u fyzického kyvadla (oproti tomu mathematickému) opravdu záleží na počáteční délce výkyvu. Proto se rozhodneme, že využijeme hodnotu pro d = 7 cm a tedy naše T_M = 2,0038 s

± + chyba

Pokud dosadíme naše hodnoty z tabulek 1 a 2 do vztahu (5), dostaneme, že:

$$g = \frac{4\pi^2(l_P - d_z)}{{T_M}^2}$$

Takže g_m = **9,656 m·s⁻²**. ⚡ chyba

Nicméně vzoreček (5) jest poměrně nepřesný, neboť platí pro mathematické kyvadlo, a proto bychom se měli pokusit vypočítat gravitační zrychlení přesněji pro fyzické kyvadlo.

K tomu budeme museti nejprve vypočítati polohu těžiště kyvadla d_T [4]:

$$d_T = \frac{m_1 d_1 + m_2 d_2}{m_1 + m_2} \tag{10}$$

kde za m_1 dosadíme hmotnost koule, za m_2 hmotnost provázku, za d_1 polohu těžiště koule oproti ose otáčení kyvadla a za d_2 polohu těžiště provázku oproti ose otáčení.

Ze vzorečku (10) nám vychází, že vzdálenost těžiště reálného kyvadla od osy otáčení $\boldsymbol{d_T}$ = **997,9 ± 1 mm**. Oproti tomu pokud by bylo kyvadlo mathematické, mělo by délku $\boldsymbol{l = l_P - d_z}$ = **982,10 ± 1 mm**.

chybné zápisy výsledků a chyb

Pokud tyto dvě hodnoty porovnáme, vychází nám, že reálné kyvadlo má těžiště posunuté o 15,82 ± 1 mm oproti mathematickému kyvadlu, což činí zhruba 1,61% délky mathematického kyvadla.

Poté vypočítáme moment setrvačnosti koule dle vzorce (6), moment setrvačnosti provázku dle (7) a nakonec obé spojíme ve vzorečku (8), kde dosadíme na místo a polohu těžiště d_T, abychom vypočítali celkový moment setrvačnosti reálného kyvadla I_f :

$$I_f = I_{0k} + I_{0p} + M{d_T}^2$$

kde I_{0k} a I_{0p} jsou momenty setrvačnosti koule a provázku.

Odtud nám vyjde, že $\boldsymbol{I_f}$ = **0,06283 kg·m²**. Zatímco pro mathematické kyvadlo vyjde dle vzorce (2) $\boldsymbol{I_m}$ = **0,0608 kg·m²**. Tyto hodnoty se liší o 0,00202 kg·m², což značí, že moment setrvačnosti reálného kyvadla jest o 3,33% větší než moment setrvačnosti mathematického kyvadla.

Naším cílem jest však především vypočítati hodnotu gravitačního zrychlení g.

Ze vzorečku (1) si tak vyjádříme gravitační zrychlení, za předpokladu, že výchylka kyvadla jest dostatečně malá a můžeme ji tak zanedbati.

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2 m d_T} \tag{11}$$

Po této korekci po dosazení všech hodnot vychází velikost gravitačního zrychlení g_f = **9,819 m·s^{-2}.** +✓

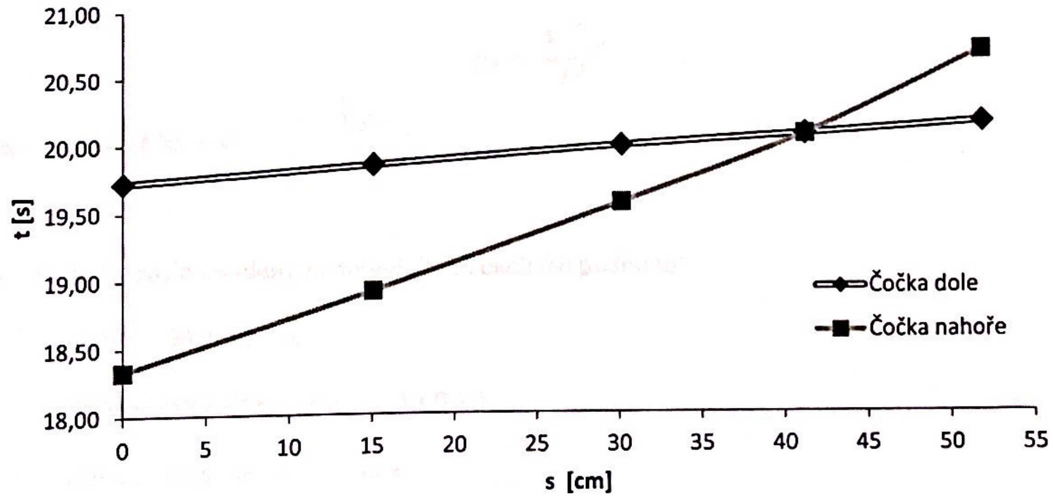
Reversní kyvadlo

Pro reversní kyvadlo s referenční hodnotou plně zašroubované čočky s = 0 cm byly změřeny následující časy pro 10 period v závislosti na tom, zda byla čočka umístěna dole t_d či nahoře t_h.

Tabulka 3: Reversní kyvadlo

k	s [cm]	t_d [s]	t_h [s]
10	52	20,13	20,66
10	41	20,05	20,05
10	30	19,97	19,55
10	15	19,84	18,91
10	0	19,73	18,33

Výsledek jsme si vynesli do grafu v Originu jednak při samotném měření (viz příloha) a také jsme data tabulky 3 vynesli do grafu 2 v Excelu:



Graf 2: Časy kmitů pro reversní kyvadlo s čočkou nahoře a dole

V programu Origin jsme interpolací grafu zjistili, že průsečík obou časů nastává při hodnotě s_p = 41,03 mm.

Výsledky měření časů T jsou vyneseny v tabulce 4:

Tabulka 4: Časy kmitů pro reversní kyvadlo pro redukovanou délku

k	s_p [cm]	t_d [s]	t_h [s]
10	41,03	20,0421	20,0447
10	41,03	20,0440	20,0442
10	41,03	20,0433	20,0446
10	41,03	20,0441	20,0454
10	41,03	20,0433	20,0445
		20,0434	20,0447

V posledním řádku tabulky jsou průměry všech naměřených hodnot t_d a t_h pro s_p.

Periodu T z těchto dat získáme, pokud zprůměrujeme průměrné hodnoty t_d a t_h a výsledek vydělíme 10.

Tudíž T = 2,0044 s.

chybná hodnota

Jelikož se naše časy shodují, můžeme prohlásit délku rozestupu mezi ráfky D = 94,27 cm zároveň za hodnotu redukované délky kyvadla l_r. Když si pak vyjádříme z rovnice (9) zrychlení g_r, dostáváme

$$g_r = \frac{4\pi^2 l_r}{T^2}$$

číselně $\boldsymbol{g_r}$ **= 9,838 m·s**$^{-2}$.

Experimenty byly provedeny za následujících okolních podmínek:

Teplota: 25,9 ± 0,1 °C

Relativní vlhkost vzduchu: 32,3 ± 0,1 %

Atmosférický tlak: 976 ± 1 hPa

Diskuse

Mathematické kyvadlo

+ vlivy na měření

Tíhové zrychlení g v Praze jest 9,810 m·s^{-2} [5].

Pokud jsme počítali s mathematickým kyvadlem, lišila se hodnota g_m = 9,656 m·s^{-2} od této tabelované hodnoty o 0,154 m·s^{-2}, což činí procentuální chybu 1,60%.

Pokud jsme počítali dle vzorečku fyzického kyvadla, lišila se hodnota g_f = 9,819 m·s^{-2} od tabelované hodnoty o 0,0088 m·s^{-2}, což nám dává chybu 0,91‰.

Tento rozdíl pramení především z rozdílných hodnot délky kyvadla mathematického l = 982,10 ± 1 mm a fyzického d_T = 997,9 ± 1 mm, kde činí odlišnost 1,61%.

Ještě větší chybu nám pak dává moment setrvačnosti kyvadla, kde pro mathematické I_m = 0,0608 kg·m^2 a fyzické I_f = 0,06283 kg·m^2 máme odlišnost 3,33%.

Jest viděti, že korekce vzorečku pro mathematické kyvadlo snížila relativní procentuální chybu minimálně o jeden řád.

Tato zbytková chyba, jest dána nejpravděpodobněji počáteční výchylkou kyvadla – členem $\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$, který jsme při našem měření zanedbali.

Reversní kyvadlo

U reversního kyvadla jsme si hlavně dávali pozor, aby chyba pásového měřidla ± 1 mm vzhledem k celkové délce závěsu ≈ 1m, která dává chybu v řádu 1‰, byla dominantní chybou.

Průměrné časy t_d a t_h se tak nesměly lišit o více než 1‰.

Průměrné hodnoty 20,0434 a 20,0447 se liší jen o 0, 07‰, tím pádem jest tato chyba zcela minoritní a marginální.

Hodnota g_r = 9,838 m·s^{-2} se liší od tabelované hodnoty o 0,028 m·s^{-2}, což jest procentuální chyba 0,28%, která pochází především od měřidla.

Závěr

Povedlo se nám změřit gravitační zrychlení pomocí metody mathematického kyvadla:

$$g_m = 9{,}656 \text{ m·s}^{-2}$$

Po korekci na fyzické kyvadlo nám pak gravitační zrychlení vyšlo:

$$g_f = 9{,}819 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Určili jsme těžiště mathematického kyvadla l a těžiště fyzického kyvadla d_T:

chyby u všech hodnot

$$l = 982{,}10 \pm 1 \text{ mm}$$

$$d_T = 997{,}9 \pm 1 \text{ mm}$$

Určili jsme moment setrvačnosti mathematického kyvadla I_m a fyzického kyvadla I_f:

$$I_m = 0{,}0608 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_f = 0{,}06283 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Methodou reversního kyvadla se nám podařilo stanoviti gravitační zrychlení g_r:

$$g_r = 9{,}838 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Literatura

[1] J. Brož a kol.: Základy fyzikálních měření I. SPN, Praha 1967, čl. 2.2.2.4, st. 2.1.2

[2] J. Brož a kol.: Základy fyzikálních měření I. SPN, Praha 1983, čl. 2.1.6.3, st. 2.1.2

[3] Z. Horák, F. Krupka: Fyzika, SNTL, Praha 1981, kap. 2.5.7

[4] FÄHNRICH, Jaromír, Dana SLAVÍNSKÁ a Antonín HAVRÁNEK. *Příklady z mechaniky*. 5. vyd. Praha: Karolinum, 2001. Učební texty Univerzity Karlovy v Praze. ISBN 80-246-0387-X.

[5] MIKULČÁK, Jiří. Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy. Praha: Prometheus, 2003. ISBN 978-807-1962-649; str. 247

[1–3] nejsou v textu citovány

Josef Kucera

	T	1 [s]
	10	20,0147
2	10	10,0154
3	10	20,0192
4	5	10,0068
5	5	10,0060
6	5	10,0092
7	5	10,0104
8	5	10,0083
9	5	10,2862
10	5	10,2988
11	5	10,3134

3 cm

VĚTŠÍ VÝCHYL

5	10,2224
5	10,2333
5	10,2451
5	10,2563

vychýlení	T	1
4 cm	5	10,1926
4 cm	5	10,2091
5 cm	5	10,0126
5 cm	5	10,1522
5 cm	5	10,0119
7 cm	5	10,0117
7 cm	5	10,0187
10 cm	5	10,0262
10 cm	5	10,0882

T = 25,9 °C

32,3 % RH

P = 976,0 hPa

Matematicko-fyzikální ...
Fyzikální praktikum

5/4/2019

Josef Žáček

délka kyvadla ~~99cm~~, ~~98,9cm~~
98,9cm
99,1cm
99,0cm

výška háčku	průměr koule	závěs
7,1 mm	26,23 mm	7,90 mm
7,1 mm	26,21 mm	7,90 mm
7,0 mm	26,20 mm	7,89 mm

hmotnost kuličky
62,5005 g

hmotnost provázku
0,5414 g

vzdálenost 5,188 mm 52,02 mm
52,00 mm

DOLE$_D$		NAHOŘE$_D$	
10	20,134	10	20,712
10	20,130	10	20,617

Zim [signature]
5/4/2019

Matematicko-fyzikální fakulta
Fyzikální praktikum I

Josef Šimon

ŽEH

10	~~21,6182~~
10	19,7255
10	19,7255
10	19,7254

NAHOŘE H

10	18,3360
10	18,3227

18,3385

PRŮSEČÍK K

37,54 mm

PRŮSEČÍK P

41,03 mm

		DOLE	HORE	
41 mm	20,0421	20,0478	20,0420	20,0509
30 mm		DOLE	HORE	
15 mm		19,9597	19,5452	
		19,9722	19,5465	

DOLE	HORE
19,8446	18,9128
19,8423	18,9110

Matematicko-fyzikální fakulta
Fyzikální praktikum I

5/4/2019

LIŠIT SE O $\frac{1}{100}$ PŘ měření

Josef Kuncera

~~23,0785~~

20,0494
20,0477

DOLE

20,0843
20,0838 HORE

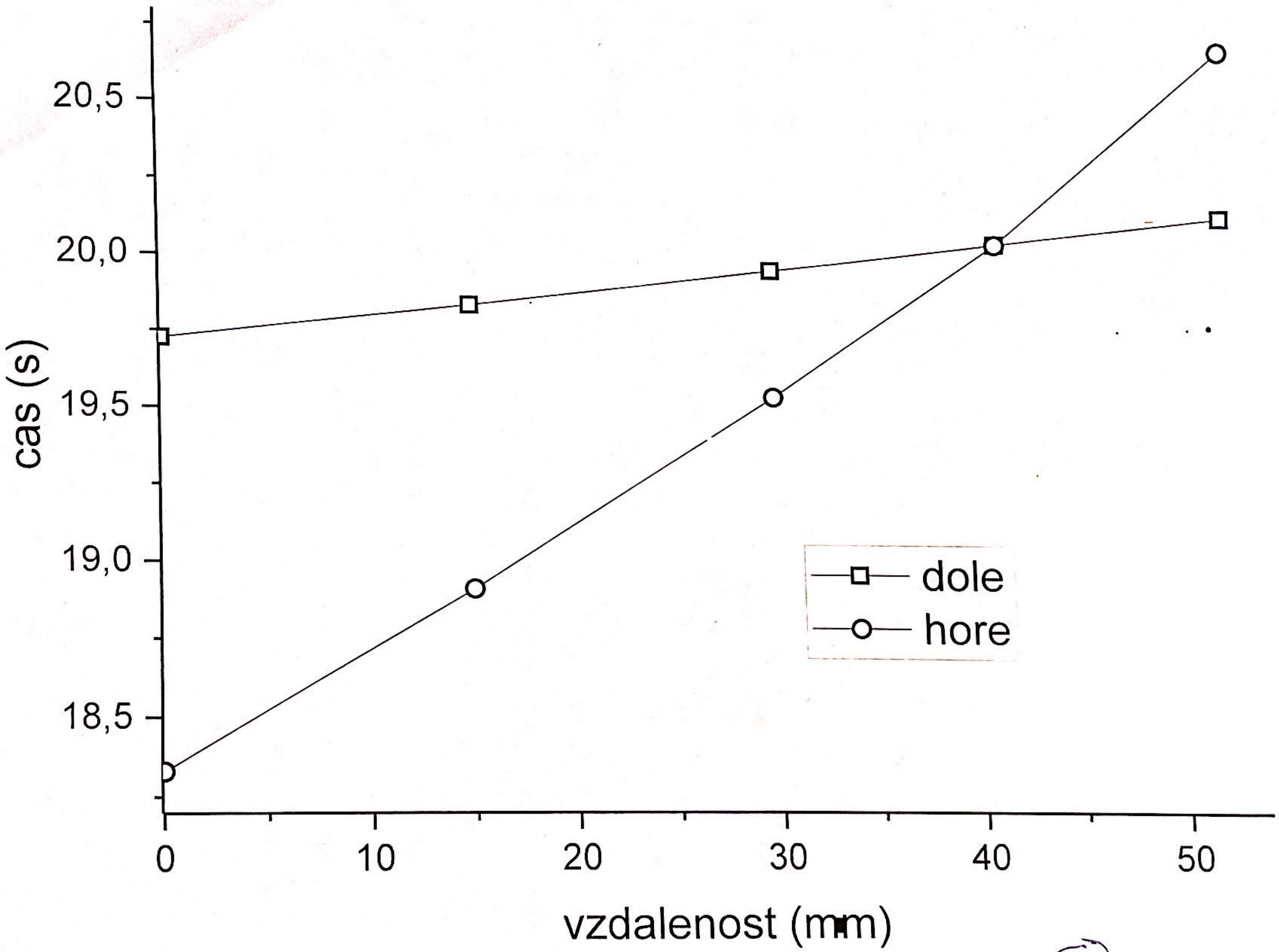
KOREKCE
20,0399
20,0591

20,0421 20,0447
20,0440 20,0442
20,0433 20,0446
20,0441 20,0454
20,0433 20,0445

PRŮMĚRY POROVNAT

r = 100,8 100,7 6,5 mm
100,8 6,2 mm

5/4/2019



Matematicko-fyzikální
Fyzikální praktikum

2B 5/4/2019