# 1 ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY — FYZIKA III (OPTIKA)

nestac. elmg. pole musí splňovat Rovnici kontinuity $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$

## MAXWELLOVY ROVNICE (dif. tv., ve volném prostoru s volnými náboji a volnými proudy)

Gaussův zák.: $\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$, $\rho = \rho_f + \rho_p$ (volné, polarizační); $\vec{E}$ ... zřídlové

neexistence mag. monopólů: $\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}$; $\vec{B}$ ... solenoidální

Faradayův zák. elmg. indukce: $\boxed{\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$

Ampérův zák.: $\boxed{\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$; $\vec{j}_M$ ... Maxwellův posuvný proud

$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \mathrm{F\,m^{-1}}$ $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \mathrm{H\,m^{-1}} = \mathrm{N\,A^{-2}}$ $[f] = \mathrm{N\,m^{-3}}$

Lorentzova síla: $\boxed{\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})}$

(tj. síla působící na jedn. objemu) objemová hust. Lorentzovy síly: $\boxed{\vec{f} = \vec{f}_E + \vec{f}_B = \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}}$

## Vlnová rovnice (ve vakuu)

$$\boxed{\Delta\vec{E} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \cancel{\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E}} - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial \operatorname{rot}\vec{B}}{\partial t} = -\mu_0\cancel{\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$\operatorname{div}\vec{E} = 0 \Leftarrow (\rho = 0\ \ \vec{j} = 0)$ ... vakuum

- již známá z mechaniky $\Delta u = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
- řešení vlnové rovnice = VLNA, každá fce $f(z \pm vt)$ je řešením $\rightarrow$ rychlost světla $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}} \sim 3\cdot 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$
- postupná rovinná harm. vlna (monochromatická) $\vec{E} = \vec{E}_0\cos[k(z \pm vt)] = \vec{E}_0\cos\left(kz \pm \frac{2\pi vt}{\lambda}\right) = \vec{E}_0\cos\left(kz \pm \frac{2\pi t}{T}\right) = \vec{E}_0\cos(kz \pm \omega t)$ ... 1D případ

velikost vlnového vektoru $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$

ve 3D: $\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega t \pm \delta)}$

$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{s}_0$ ... vlnový vektor, $|\vec{s}_0| = 1$, $\delta$ ... počáteční nástup fáze vlny v bodě $\vec{r} = 0$, $t = 0$

$\boxed{\vec{k}\cdot\vec{r} = \text{konst.}}$ ... VLNOPLOCHA (tj. rovina konst. fáze)

$\ominus \longrightarrow$ šíření ve směru $\vec{k}$

$\oplus \longleftarrow$ šíření proti směru $\vec{k}$

komplexní popis: $\boxed{\tilde{\vec{E}} = \tilde{\vec{E}}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega t)}}$, $\vec{E} = \mathrm{Re}\{\tilde{\vec{E}}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}\pm\omega t)}\}$

komplexní amplituda $\boxed{\tilde{\vec{E}}_0 = \vec{E}_0 e^{\pm i\delta}}$ — reálná amplituda

látkové prostředí:

při průchodu elmg. vlny v optickém oboru spektra reaguje materiálové prostředí převážně na elektrickou složku vlny

$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q(\vec{E} + \vec{v}_e\times\vec{B})$ $|\vec{F}_B| = |q v_e B \sin\alpha|$ $|\vec{F}_B|_{max} = |q v_e B|$ $\xrightarrow{B = \frac{E}{v}}$ $|\vec{F}_B|_{max} = |q v_e \frac{E}{v}|$ $\Rightarrow$ $\frac{|\vec{F}_B|_{max}}{|\vec{F}_E|} = \frac{v_e}{v}$

obvykle $v_e \ll v$ (rychlost elektronu) $\Rightarrow$ v oboru opt. frekvencí zanedbáme mag. část interakce $\Rightarrow$ aproximace nemagnetického prostředí

vytvořením dipólů a vychylováním elektronových obalů; $v_e$ ... rychlost elektronu, $v$ ... rychlost šíření elmg. vlny

## Vlnová rovnice (nemagnetické prostředí)

$$\boxed{\Delta\vec{E} = \operatorname{grad}\frac{\rho_f}{\varepsilon_0} + \operatorname{grad}\frac{\rho_p}{\varepsilon_0} + \mu_0\frac{\partial\vec{j}_f}{\partial t} + \mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}$$

- neobsahuje materiálové parametry ($\varepsilon, \mu, \chi, \sigma$) (susceptibilita, vodivost), které jsou obecně frekvenčně závislé

$\vec{B} \cong \mu_0\vec{H}$ $(\mu_r = 1)$

$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial \operatorname{rot}\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$

$\vec{j} = \vec{j}_f + \vec{j}_P$ (volné proudy, polarizační proudy), $\vec{j}_P = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$

$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} = \operatorname{grad}\left(\frac{\rho_f + \rho_p}{\varepsilon_0}\right)$ (volné, polarizační), $\rho_p = -\operatorname{div}\vec{P}$

$$\Delta\vec{E} = \operatorname{grad}\frac{\rho_f}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{P} + \mu_0\frac{\partial\vec{j}_f}{\partial t} + \mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

neabsorbující **dielektrikum** bez volných nábojů a proudů: $\rho_f = 0$, $\vec{j}_f = 0$

**homogenní** pr. = materiálové parametry nezávisejí na poloze: $\operatorname{div}\vec{P} = 0$

**lineární** pr. $\Rightarrow$ $\vec{P} = \varepsilon_0\chi^{(1)}\vec{E} + \varepsilon_0\chi^{(2)}\vec{E}\vec{E} + \dots$ (nelineární optika)

**izotropní** = parametry důležité pro šíření vln nezávisejí na směru šíření ($\chi$ ... skalár)

$\vec{P} \neq 0$, $\rho_P = 0$, $\operatorname{div}\vec{P} = 0$; $\chi^{(1)}$ ... susceptibilita 1. řádu

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\varepsilon_0\underbrace{(1+\chi)}_{\varepsilon_r}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\Delta\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}} \qquad \boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_r}}}$$

**index lomu**: $\boxed{n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r}}$ $\boxed{k = \frac{n}{c}\omega}$

$\vec{E}\perp\vec{B}\perp\vec{k}$ ... pravotočivý systém pokud platí vlnová rovnice tj. pro homog., izotropní, lineární, nemagnetické prostředí bez volných nábojů a proudů ($\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$)

$\rightarrow$ neplatí obecně (nejsou obecně kolmé např. v nehomogenních nebo vodivých prostředích)

neplatí v anizotropním, kde $\vec{D}$ a $\vec{P}$ nejsou rovnoběžné s $\vec{E}$

pro rovinnou vlnu $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$: $\nabla\cdot\vec{E} = i\vec{k}\cdot\vec{E} = 0$, $\nabla\times\vec{E} = i\vec{k}\times\vec{E} = i\omega\vec{B}$; $\nabla\cdot\vec{B} = i\vec{k}\cdot\vec{B} = 0$, $\nabla\times\vec{B} = i\vec{k}\times\vec{B}$; $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -i\omega\vec{B}$

impedance prostředí $\boxed{Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}}}$ impedance vakua $\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cong 377\,\Omega}$

$E = vB = v\mu_0 H = \frac{\mu_0}{\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_0}}H = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0}}H = ZH$

## Energie rovinné monochromatické vlny

pro neabsorbující prostředí ($\vec{E}$, $\vec{D}$ kmitají ve fázi): $\boxed{u_E = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2}$

pro nemagnetické pr.: $\boxed{u_B = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} = \frac{1}{2\mu_0}B^2}$

v lin. nemag. pr.: $B = \frac{E}{v(\omega)} = E\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r(\omega)\mu_0}$ $\Leftarrow$ $B^2 = \varepsilon_0\varepsilon_r(\omega)\mu_0 E^2$ pro monochr. vlny

$\boxed{u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 = u_E}$

**Helmholtzova rovnice** (časová rovnice) (homog. rovnice): $\boxed{\Delta\vec{E} = -k^2\vec{E}}$ platí v prostoru bez zdrojů vlnění

v oboru optických frekvencí $\sim 10^{15}\ \mathrm{s^{-1}}$ mají praktický význam časové střední hodnoty protože žádný detektor není tak rychlou odezvu aby mohl změny v čase měřit (max. $10^{11}$–$10^{12}\ \mathrm{s^{-1}}$) (klasické např. kulová sk. vlna)

$$\boxed{\langle u_E\rangle_T = \langle u_B\rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E_0^2\underbrace{\cos^2(kz-\omega t)}_{1/2}\,dt = \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r E_0^2}$$

$$\boxed{\langle u\rangle_T = \langle u_E\rangle_T + \langle u_B\rangle_T = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E_0^2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 n^2 E_0^2$$

zářivý výkon: $\boxed{\langle uc\rangle_T = \frac{1}{2Z_0}E_0^2}$

Výkon $= \frac{\text{Energie}}{\text{čas}} = \frac{u\cdot\text{objem}}{\text{čas}} = \frac{uAct}{t} = uc$, $A = 1\,\mathrm{m}^2$, $c\cdot t$, $t = 1\,\mathrm{s}$

Poyntingův vektor: $\boxed{\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}}$

pro lin. pol. vlnu $S = E\cdot H = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c}$

$$\boxed{\langle S\rangle_T = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mu_0 c}} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{\mu_0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2 = \frac{1}{2Z_0}E_0^2 = \langle uc\rangle_T$$

$$\boxed{\langle S\rangle_T = \langle uc\rangle_T} = I \text{ ... intenzita vlny}$$

$[S] = [I] = \mathrm{W\,m^{-2}}$ tj. energie, která proteče plochou $A = 1\,\mathrm{m}^2$ za 1 s, tedy plošná hustota výkonu

## Tlak světla (vysvětlení pomocí částicového modelu)

energie $\varepsilon = h\nu = \hbar\omega$, hybnost $p = \frac{h\nu}{c}$ } foton

$N_f$ fotonů dopadá na $A = 1\,\mathrm{m}^2$ a předají energii $N_f\varepsilon$ a předají hybnost $N_f p = N_f\frac{\varepsilon}{c} = P$

za $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$

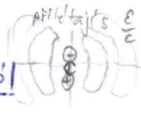
$\boxed{P = N_f\frac{\varepsilon}{c}}$ ... pro případ úplné absorpce

potenciální změna hybnosti z $\frac{\varepsilon}{c}$ na nulu

v případě dokonalého zrcadlového odrazu je předána hybnost dvojnásobná

přiletují s $\frac{\varepsilon}{c}$ a odlétají s $-\frac{\varepsilon}{c}$

## Hertzův dipól



## Kulová vlna

- neex. vektorová kulová vlna vyhovující Max. rovnicím
- **skalární kulová vlna** splňuje sk. vlnovou rovnici $\Delta\psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$

$\psi = \frac{f(r \mp vt)}{r}$ — expandující, + smršťující se

spec. harmonická $\psi(\vec{r}, t) = \frac{A}{r}\cos(kr \pm \omega t \pm \delta) = \frac{A}{r}e^{i(kr \pm \omega t)}$

$A$ ... síla zdroje; $\frac{A}{r}$ ... amplituda; směr zleva / zhruba aproximovat sk. kulovou vlnou

# 2 POLARIZACE (rovinné monochr. vlny)

popisuje směr kmitání $\vec{E}$ a jeho vývoj v čase a prostoru – předpověditelným způsobem (deterministicky) ... světlo polarizované (např. laser)
– vývoj zcela náhodný (stochasticky) ... světlo nepolarizované (např. žárovka)

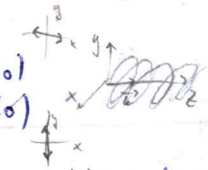
světlo částečně polarizované = směs pol. a nepol. světla (žárovka + laser)

neabsorbující izotropní prostředí bez lineárního a kruhového dvojlomu: $\vec{k} \perp \vec{E} \perp \vec{H}$

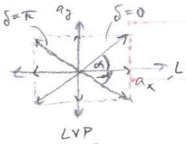
skládání 2 lineárně pol. vln: 1. vlna $\rightarrow \tilde{E}_x = a_x e^{i(kz-\omega t)}$ ... LHP (lineárně horizontálně pol. světlo)

2. vlna $\rightarrow \tilde{E}_y = a_y e^{i(kz-\omega t+\delta)}$ ... LVP (lineárně vertikálně pol. světlo)

dohromady tedy vlna $\tilde{\vec{E}} = \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{pmatrix}$

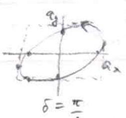


$\vec{E}$ opisuje obecně povrch eliptického válce $\parallel$ s osou $z$



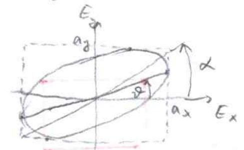
↺ LEP (levotočivá elipticky pol. vlna) např. $\delta = \frac{\pi}{4}$

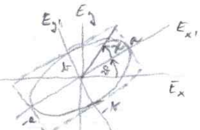
↻ REP (pravotočivá elipticky pol. vlna) $\delta = -\frac{\pi}{4}$



levo a pravotočivost určujeme při pohledu proti směru šíření

pokud zafixujeme polohu z dostáváme v rov. xy parametrické vyjádření elipsy = trajektorie koncových bodů vektoru $\vec{E}(t)$ pro dané z





polarizační elipsa:

$$\boxed{\left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{a_x}\right)\left(\frac{E_y}{a_y}\right)\cos\delta + \left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2 = \sin^2\delta}$$

→ elipsa obecně natočená vůči x, y získána vyloučením z, t z vlnové rov.

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$E_z = 0$

→ ztraceny informace poloha $E(x,y,t)$ – vyloučen čas

smysl rotace E – jsou zde kvadráty $\sin^2\delta, \cos^2\delta$

popis elipsy:
- a, b ... hlavní a vedlejší poloosa
- $\vartheta$ ... úhel natočení hlavní poloosy vzhledem k souř. soust.
- $\chi$ ... elipticita $\boxed{\operatorname{tg}\chi = \pm\frac{b}{a}}$
- $\alpha$ ... úhel natočení opsaného obdélníku $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_y}{a_x}$

spec. případ $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$

$$\left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2 = 1$$ ... rovnice elipsy v osové poloze

pokud navíc $a_x = a_y \Rightarrow$ kruhově polarizovaná vlna

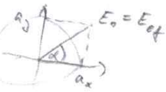
## JONESŮV FORMALISMUS

• popis zcela polarizovaného záření

(částečně pol. světlo → STOKESŮV FORMALISMUS)
využívá Stokesovy vektory a Muellerovy matice

světlo → Jonesovy vektory

pol. prvky → Jonesovy matice



$\sin\alpha = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}}$

$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a_y}{a_x} \Rightarrow a_x = a_y\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\frac{a_y}{\sin\alpha} = E_{ef} = \sqrt{a_x^2+a_y^2}$

$E_x = a_x e^{i\varphi} = a_y\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}e^{i\varphi}$

$E_y = a_y e^{i\delta}e^{i\varphi} = a_y\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}e^{i\delta}e^{i\varphi}$

$E_x = E_{ef}\cos\alpha\, e^{i\varphi}$

$E_y = E_{ef}\sin\alpha\, e^{i\delta}e^{i\varphi}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = E_{ef}\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\, e^{i\delta} \end{pmatrix}}_{\vec{J}} e^{i\varphi}}$$

Jonesův vektor $\boxed{\vec{J} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\, e^{i\delta} \end{pmatrix}}$ je jednotkový tj. $\vec{J}\cdot\vec{J}^* = 1$

$\vec{x}\cdot\vec{x}^*$ standardní sk. souč. na $\mathbb{C}^n$

Energie lin. pol. světla $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ $\langle u_E\rangle_T = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2$

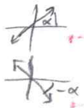
Energie elipticky pol. sv. $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0\tilde{\vec{E}}\cdot\tilde{\vec{E}}^* = \frac{1}{2}\varepsilon_0(E_xE_x^* + E_yE_y^*)$

$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$

spec. případy:

1) $\delta = 0$ $\vec{J} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$

2) $\delta = \pi$ $\vec{J} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}$



$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

$e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

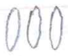
3) kruhově pol. světlo $a_x = a_y \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{a_y}{a_x} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

$\delta = \frac{\pi}{2}$ $\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ ... LCP (levotočivé kruhově pol.)

$\delta = -\frac{\pi}{2}$ $\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ ... RCP (pravotočivé kruhově pol.)

### Způsoby polarizace

1) lineární dichroismus = různá absorpce pro $\vec{E}_{ef}$ různé směry kmitů v anizotrop. látkách
→ POLARIZÁTOR

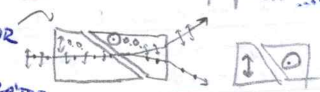


$\vec{E}$ absorpce → nepropouští

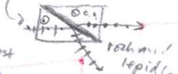
→ $\vec{E}$ propouští ... kmitosměr polarizátoru

2) lineární dvojlom

WOLLASTONŮV POLARIZÁTOR



GLANŮV-THOMPSONŮV POLARIZÁTOR

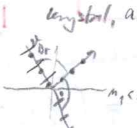


rozhraní, lepidlo

využívá tot. odrazu pro jednu pol. komponentu

oba materiál jednoosý anizotrop. krystal, ale optické osy kolmo na sebe

3) odraz (Brewsterův úhel)



$n_1 < n_2$

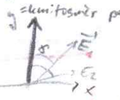
odráží se pouze složka kolmá k rov. dopadu (tj. polarizace S)

$r_p(\vartheta_{Br}) = 0$ $\operatorname{tg}\vartheta_{Br} = \frac{n_2}{n_1}$

## MALUSŮV ZÁKON

$$\boxed{I(\gamma) = I_0\cos^2\gamma}$$

(průchod jedné lin. pol. vlny)



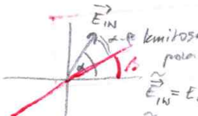
na pol. dopadá nepolarizované světlo (všechny směry mají stejnou pravděpodobnost) $\gamma \in [0, 2\pi]$

$I_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I_0\cos^2\gamma\, d\gamma = \frac{I_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2\gamma}{2}\right)d\gamma = \frac{I_0}{2\pi}\left[\frac{\gamma}{2}\right]_0^{2\pi}$

$\boxed{I_p = \frac{1}{2}I_0}$ → ideální polarizátor propouští polovinu intenzity nepol. světla

### Jonesova matice polarizátoru:

$$\boxed{\overleftrightarrow{T}_{pol} = \begin{pmatrix} \cos^2\beta & \sin\beta\cos\beta \\ \sin\beta\cos\beta & \cos^2\beta \end{pmatrix}}$$



$\tilde{\vec{E}}_{IN} = E_0\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}e^{i\varphi}$

$\tilde{\vec{E}}_{OUT} = E_0\cos(\alpha-\beta)\begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}e^{i\varphi}$

$\tilde{E}_{OUT,x} = E_0(\cos\alpha\cos^2\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\beta)e^{i\varphi}$

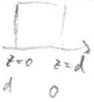
$\tilde{E}_{OUT,y} = E_0(\sin\beta\cos\beta\cos\alpha + \sin^2\beta\sin\alpha)e^{i\varphi}$

$$\tilde{\vec{E}}_{OUT} = \overleftrightarrow{T}_{pol}\tilde{\vec{E}}_{IN}$$

$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$

### Jonesova matice fázové destičky (v osové poloze)

$$\boxed{\overleftrightarrow{T}_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}}$$



$z=0$ $z=d$

$\tilde{E}_x(0) = a_x e^{-i\omega t}$ $\tilde{E}_x(d) = a_x e^{ik_0 n_x d}e^{-i\omega t}$

$\tilde{E}_y(0) = a_y e^{-i\omega t}$ $\tilde{E}_y(d) = a_y e^{ik_0 n_y d}e^{-i\omega t}$

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_x(d) \\ \tilde{E}_y(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ik_0 n_x d} & 0 \\ 0 & e^{ik_0 n_y d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{E}_x(0) \\ \tilde{E}_y(0) \end{pmatrix}$$

$k_0 n_x d = \varphi_x$

$k_0 n_y d = \varphi_y$

$\varphi = \varphi_y - \varphi_x = k_0(n_y - n_x)d$

$\Delta_{OD}$ ... rozdíl opt. drah

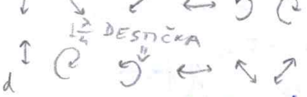
### čtvrtvlnová destička

$\Delta_{OD} = \frac{\lambda_0}{4}$ (dráh. rozdíl)

$$\boxed{\overleftrightarrow{T}_{\frac{\lambda}{4}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\varphi = k\Delta_{OD}}$ fáz. rozdíl

$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{\lambda_0}{4} = \frac{\pi}{2}$



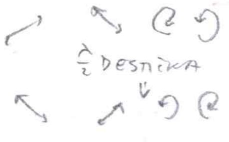


### Jonesova matice rotátoru (v osové poloze)

$$\boxed{\overleftrightarrow{R}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}}$$

$\tilde{\vec{E}}_{IN} = E_0\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}e^{i\varphi}$

$\tilde{\vec{E}}_{OUT} = E_0\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix}e^{i\varphi}$





### polovlnová destička

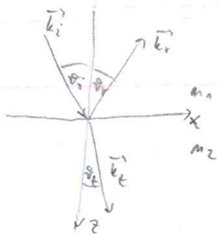
$\Delta_{OD} = \frac{\lambda}{2}$

$$\boxed{\overleftrightarrow{T}_{\frac{\lambda}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2} = \pi$

# 3 ODRAZ A LOM (na rozhraní dvou dielektrik) homog., izotropní, nemagnetické, neabsorbující

rovinné rozhraní s polohovými vektory $\vec{r}_B = (x, y, 0)$ (nepř.) $\Rightarrow$ podm. spojitosti $\vec{E}_{i,\text{tečná}}(\vec{r}_B, t) + \vec{E}_{r,\text{tečná}}(\vec{r}_B, t) = \vec{E}_{t,\text{tečná}}(\vec{r}_B, t)$ $\forall \vec{r}_B$ $\forall t$




$\vec{\nu} = (0, 0, -1)$ ... normála k rozhraní

$\vec{E}_{\text{tečná}} = \vec{\nu} \times (\vec{E} \times \vec{\nu}) \Rightarrow \vec{\nu} \times (\vec{E}_{0i} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r}_B - \omega_i t)} \times \vec{\nu}) + \vec{\nu} \times (\vec{E}_{0r} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r}_B - \omega_r t)}) \times \vec{\nu} = \vec{\nu} \times (\vec{E}_{0t} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r}_B - \omega_t t)}) \times \vec{\nu}$

rovina dopadu $(\vec{k}_i, \vec{\nu})$ ... $xz$

$\vec{E}_{0i,r,t} \neq f(\vec{r}_B, t)$ všechny členy stejnou funkční závislost na $\vec{r}_B, t \Rightarrow \vec{k}_i \cdot \vec{r}_B - \omega_i t = \vec{k}_r \cdot \vec{r}_B - \omega_r t = \vec{k}_t \cdot \vec{r}_B - \omega_t t$

$$\tilde{\vec{E}}_i = \tilde{\vec{E}}_{0i} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)}$$
$$\tilde{\vec{E}}_r = \tilde{\vec{E}}_{0r} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t)}$$
$$\tilde{\vec{E}}_t = \tilde{\vec{E}}_{0t} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t)}$$

$\vec{r}_B = 0$: $\omega_i t = \omega_r t = \omega_t t \Rightarrow \boldsymbol{\omega_i = \omega_r = \omega_t}$

$t = 0$: $\vec{k}_i \cdot \vec{r}_B = \vec{k}_r \cdot \vec{r}_B = \vec{k}_t \cdot \vec{r}_B$

$\vec{k}_i = (k_{ix}, 0, k_{iz})$ (rov. dopadu $xz$)
$\vec{r}_B = (x, y, 0)$ (rozhraní)
$\Big\} \vec{k}_i \cdot \vec{r}_B = k_{ix} x$

$\vec{k}_r = (k_{rx}, k_{ry}, k_{rz})$
$\vec{k}_t = (k_{tx}, k_{ty}, k_{tz})$

$k_{ix} x = k_{rx} x + k_{ry} y = k_{tx} x + k_{ty} y$ $\forall \vec{r}_B$

$k_{ix} = k_i \sin\vartheta_i$

$\Downarrow$ $k_{ry} = 0$, $k_{ix} = k_{rx}$

$\Downarrow$ $k_{ty} = 0$, $k_{ix} = k_{tx}$

$\Rightarrow \vec{k}_i = (k_{ix}, 0, k_{iz})$, $\vec{k}_r = (k_{rx}, 0, k_{rz})$, $\vec{k}_t = (k_{tx}, 0, k_{tz})$ } leží v rovině dopadu $xz$

$$\boxed{\vec{k}_i, \vec{k}_r, \vec{k}_t \text{ leží v rovině dopadu}}$$

$k_i = \frac{\omega}{c} n_1 = k_r$

$k_i \sin\vartheta_i = k_r \sin\vartheta_r$

## ZÁKON ODRAZU $\boxed{\vartheta_i = \vartheta_r}$

$\Leftarrow \frac{\omega}{c} n_1 \sin\vartheta_i = \frac{\omega}{c} n_1 \sin\vartheta_r$

$\Downarrow$ $\frac{\omega}{c} n_1 \sin\vartheta_i = \frac{\omega}{c} n_2 \sin\vartheta_t$

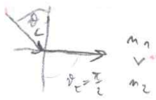
## SNELLŮV ZÁKON (ZÁKON LOMU)

$$\boxed{n_1 \sin\vartheta_i = n_2 \sin\vartheta_t}$$

$n_1 < n_2$ OL na opt. hustším pr. $\Rightarrow \vartheta_t < \vartheta_i$
$n_1 > n_2$ OL na opt. řidším pr. $\Rightarrow \vartheta_t > \vartheta_i$

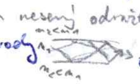
**totální odraz** na opt. řidším pr., $\vartheta_t = \frac{\pi}{2}$ pro $\vartheta_i > \vartheta_c$ ... kritický (mezní) úhel $\rightarrow$ výkon nesený odraženou vlnou je roven výkonu nesenému dopadající vlnou

$$\boxed{\sin\vartheta_c = \frac{n_2}{n_1}}$$




$n_1 \sin\vartheta_c = n_2 \sin\frac{\pi}{2}$

využití: zrcátka (větší odrazivost), světlovody

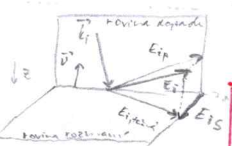



, refraktometry (měření indexu lomu)

**Evanescentní vlna** pokud je prostředí 2 dostatečně tenké $\Rightarrow$ FTIR část projde
- nutná pro zajištění podmínek spojitosti na rozhraní
- směrem do prostředí 2 je exponenciálně tlumena
- podél rozhraní nese výkon
- není příčná (tj. $\exists$ složky $\vec{E}$ a $\vec{B}$ $\parallel$ s $\vec{k}$)

Vztah mezi mag. polem, vlnovým vekt. a el. polem postupné, rovinné, homogenní netlumené vlny $\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}$

## FRESNELOVY VZTAHY




vlna obecné polarizace $\vec{E}_i$ rozložíme na 2 složky
- $\vec{E}_{is}$ ... polarizace s (senkrecht) – kolmá k rovině dopadu
- $\vec{E}_{ip}$ ... polarizace p (parallel) – rovnoběžná s rovinou dopadu

**Fresnelovy koeficienty (amplitudové) odrazu a transmise** ... obecně komplexní

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{r}_s &= \frac{\tilde{E}_{rs}}{\tilde{E}_{is}} = \frac{|\tilde{E}_{rs}|}{|\tilde{E}_{is}|} e^{i\delta_{rs}} & \tilde{r}_p &= \frac{\tilde{E}_{rp}}{\tilde{E}_{ip}} = \frac{|\tilde{E}_{rp}|}{|\tilde{E}_{ip}|} e^{i\delta_{rp}} \\ \tilde{t}_s &= \frac{\tilde{E}_{ts}}{\tilde{E}_{is}} = \frac{|\tilde{E}_{ts}|}{|\tilde{E}_{is}|} e^{i\delta_{ts}} & \tilde{t}_p &= \frac{\tilde{E}_{tp}}{\tilde{E}_{ip}} = \frac{|\tilde{E}_{tp}|}{|\tilde{E}_{ip}|} e^{i\delta_{tp}} \end{aligned}}$$

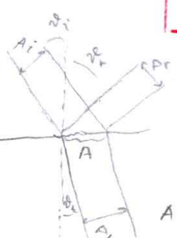
pro reálné amplitudy $E_{0rs}, E_{0rp}, E_{0ts}, E_{0tp}, E_{0is}, E_{0ip}$ potom: $\delta_{rs} = 0$ nebo $\pi$

a případ neabs. prostředí $\delta_{rp} = 0$ nebo $\pi$

(a vyloučíme totální odraz) $\delta_{ts} = \delta_{tp} = 0$

a $r_s, r_p, t_s, t_p$ jsou reálná čísla

$$\boxed{\begin{aligned} r_s &= \pm \frac{E_{0rs}}{E_{0is}} & r_p &= \pm \frac{E_{0rp}}{E_{0ip}} \\ t_s &= \frac{E_{0ts}}{E_{0is}} & t_p &= \frac{E_{0tp}}{E_{0ip}} \end{aligned}}$$




$I_i = \langle S_i \rangle_T = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n_1 E_{0i}^2$ $\quad$ dopadající výkon $J_i = A_i \langle S_i \rangle_T = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n_1 E_{0i}^2 A \cos\vartheta_i$

$I_r = \langle S_r \rangle_T = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n_1 E_{0r}^2$ $\quad$ $J_r = A_r \langle S_r \rangle_T = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n_1 E_{0r}^2 A \cos\vartheta_r$

$I_t = \langle S_t \rangle_T = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n_2 E_{0t}^2$ $\quad$ $J_t = A_t \langle S_t \rangle_T = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n_2 E_{0t}^2 A \cos\vartheta_t$

$n_1 > n_2$, $\vartheta_i > \vartheta_c$

$A = \frac{A_i}{\cos\vartheta_i} = \frac{A_r}{\cos\vartheta_r} = \frac{A_t}{\cos\vartheta_t}$

$I = \langle uc \rangle_T = c \langle u \rangle_T = c \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E_0^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 n^2 c E_0^2$ ale pak nevyjdou Fresnelovy vztahy?

ZZE: $J_i = J_r + J_t$ $\rightarrow n_1 E_{0i}^2 \cos\vartheta_i = n_1 E_{0r}^2 \cos\vartheta_r + n_2 E_{0t}^2 \cos\vartheta_t$ $\quad / : E_{0i}^2$

$n_1 \cos\vartheta_i = n_1 r_{s,p}^2 \cos\vartheta_i + n_2 t_{s,p}^2 \cos\vartheta_t$ $\quad / n_1 \cos\vartheta_i$

$$(*) \quad 1 = r_{s,p}^2 + \frac{n_2}{n_1} \frac{\cos\vartheta_t}{\cos\vartheta_i} t_{s,p}^2$$

Elektrické pole vln kolmé k rovině dopadu (polarizace s):

$$\boxed{r_s = \frac{n_1 \cos\vartheta_i - n_2 \cos\vartheta_t}{n_1 \cos\vartheta_i + n_2 \cos\vartheta_t}} = \frac{\sin(\vartheta_t - \vartheta_i)}{\sin(\vartheta_t + \vartheta_i)}$$

$$\boxed{t_s = 1 + r_s = \frac{2 n_1 \cos\vartheta_i}{n_1 \cos\vartheta_i + n_2 \cos\vartheta_t}}$$

všechny složky leží v rovině rozhraní

$E_{i,\text{tečná}} = E_{iy}$
$E_{r,\text{tečná}} = E_{ry}$
$E_{t,\text{tečná}} = E_{ty}$

podmínka spojitosti $E_{iy} + E_{ry} = E_{ty}$

$E_{iy} + r_s E_{iy} = t_s E_{iy}$

Patří mezi tzv. Stokesovy vztahy $1 + r_s = t_s$ $\rightarrow$ dosadíme do (*)

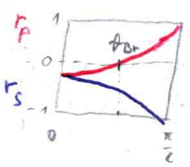
Elektrické pole vln v rovině dopadu (polarizace p):

$$\boxed{r_p = \frac{n_1 \cos\vartheta_t - n_2 \cos\vartheta_i}{n_1 \cos\vartheta_t + n_2 \cos\vartheta_i}} = \frac{\operatorname{tg}(\vartheta_t - \vartheta_i)}{\operatorname{tg}(\vartheta_t + \vartheta_i)}$$

vektory el. intenzity kmitají v rovině dopadu

$$\boxed{t_p = (1 + r_p) \frac{\cos\vartheta_i}{\cos\vartheta_t} = \frac{2 n_1 \cos\vartheta_t}{n_1 \cos\vartheta_i + n_2 \cos\vartheta_t}}$$

odraz na opt. hustším pr. ($n_1 < n_2$)




$r_s = \frac{|E_{ry}|}{|E_{iy}|} e^{i\pi} = -\frac{|E_{ry}|}{|E_{iy}|}$

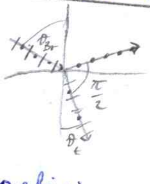
$r_s < 0 \Rightarrow$ změna fáze o $\pi$ pro všechna $\vartheta_i$

$r_p < 0$ $\vartheta_i < \vartheta_{Br} \Rightarrow$ změna fáze o $\pi$

$r_p > 0$ $\vartheta_i > \vartheta_{Br} \Rightarrow$ fáze se nemění

$\operatorname{tg}(\vartheta_{Br} + \vartheta_t) \rightarrow \infty$

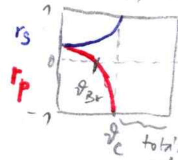
**Brewsterův úhel** $\vartheta_{Br}$




$\Rightarrow r_p = 0$ $\quad \vartheta_{Br} + \vartheta_t = \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\operatorname{tg}\vartheta_{Br} = \frac{n_2}{n_1}}$$

odraz na opt. řidším pr. ($n_1 > n_2$)




totální odraz $\Rightarrow \tilde{r}_s, \tilde{r}_p \in \mathbb{C}$

pro $\vartheta_i \geq \vartheta_c$ $\rightarrow$ totální odraz s obecným fáz. posuvem mezi dopadající a odraženou vlnou

pro $\vartheta_i < \vartheta_c$: $\Rightarrow$ komplexní amplitudové koef. $|\tilde{r}_s| = |\tilde{r}_p| = 1$

$r_s > 0 \Rightarrow$ nemění se fáze

$r_p > 0 \Rightarrow$ -||- $\quad \vartheta_i < \vartheta_{Br}$

$r_p < 0 \Rightarrow$ změna fáze o $\pi$ $\quad \vartheta_i \in (\vartheta_{Br}, \vartheta_c)$

## Výkonové koeficienty odrazu a lomu

$J_i = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n_1 E_{0i}^2 A \cos\vartheta_i$

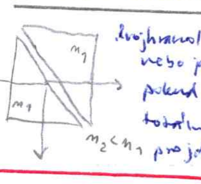
$J_r = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n_1 E_{0r}^2 A \cos\vartheta_i$

$J_t = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n_2 E_{0t}^2 A \cos\vartheta_t$

$$\boxed{R_{s,p} = \frac{J_r}{J_i} = \frac{E_{0r}^2}{E_{0i}^2} = |r_{s,p}|^2}$$

$$\boxed{T_{s,p} = \frac{J_t}{J_i} = \frac{E_{0t}^2}{E_{0i}^2} \frac{n_2}{n_1} \frac{\cos\vartheta_t}{\cos\vartheta_i} = \frac{n_2}{n_1} \frac{\cos\vartheta_t}{\cos\vartheta_i} |t_{s,p}|^2}$$

## FTIR = Frustrated Total Internal Reflection (porušená)




dvojhranol s mezerou – může pracovat jako dělič svazku nebo jako regulovatelný vazební člen

pokud je prostředí $n_2 < n_1$ dostatečně tenké totální odraz porušen, část evanescentní vlny $\rightarrow$ na tomto principu čtečky otisků prstů

# 4 INTERFERENCE

v lineárním prostředí $(\vec{P}=\varepsilon_0 \chi \vec{E})$ platí v důsledku linearity Max. rov. princip superpozice $\boxed{\vec{E}=\sum_m \vec{E}_m \,,\ \vec{B}=\sum_m \vec{B}_m}$

el. pole nejsme schopni v opt. oboru detekovat → pozorujeme při skládání stř. hodnot hustoty elektrické energie (intenzita vlny) $\boxed{I=\langle u_E\rangle_T=\frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r E_0^2=\frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2 E_0^2}$

$I=\langle u_E\rangle_T \neq \sum_m I_m$ → modulace $I(\vec{r})$ $\quad [I]=\mathrm{J\,m^{-3}}$

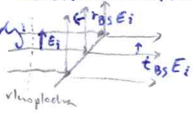
stupeň koherence – zachycuje schopnost vln interferovat

(monochromatické vlny stejné frekvence jsou dokonale koherentní)

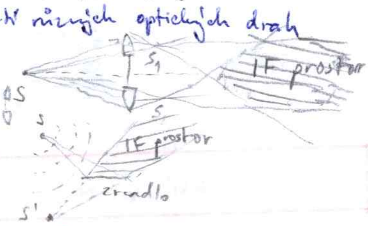
interferenční jev demonstrovány při skládání vln z jednoho kvazimonochromatického zdroje po proběhnutí různých optických drah

zdroj (kvazimonochr.) — dělení amplitudy / dělení vlnoplochy

dělení amplitudy: (dělič svazků) BS – beamsplitter




dělení vlnoplochy: (Billetova dvojčočka) (Lloydovo zrcadlo)




## DVOUSVAZKOVÁ IF ROVINNÝCH VLN

(monochromatických, lin. polarizovaných, obecně fáz. posunuté)

2 vlny: $\tilde{\vec{E}}_1=\vec{E}_{01}e^{i(\vec{k}_1\cdot\vec{r}-\omega t+\delta_{01})}=\vec{E}_{01}e^{i\varphi_1(\vec{r})}e^{-i\omega t}$

$\tilde{\vec{E}}_2=\vec{E}_{02}e^{i(\vec{k}_2\cdot\vec{r}-\omega t+\delta_{02})}=\vec{E}_{02}e^{i\varphi_2(\vec{r})}e^{-i\omega t}$ $\quad \tilde{\vec{E}}=\tilde{\vec{E}}_1+\tilde{\vec{E}}_2$ $\quad \boxed{I=\frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2\,\tilde{\vec{E}}\cdot\tilde{\vec{E}}^*}$

$I(\vec{r})$ … vše závislé na $\vec{r}$

$I=\frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2(\tilde{\vec{E}}_1+\tilde{\vec{E}}_2)\cdot(\tilde{\vec{E}}_1^*+\tilde{\vec{E}}_2^*)=\frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2\big(\underbrace{\vec{E}_{01}\cdot\vec{E}_{01}}_{E_{01}^2}+\vec{E}_{01}\cdot\vec{E}_{02}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}+\vec{E}_{01}\cdot\vec{E}_{02}e^{-i(\varphi_1-\varphi_2)}+\underbrace{\vec{E}_{02}\cdot\vec{E}_{02}}_{E_{02}^2}\big)$

$I=\frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2\left(E_{01}^2+E_{02}^2+2\vec{E}_{01}\cdot\vec{E}_{02}\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right)$

výsledek je reálný a nezávisí na čase; dále budeme předpokládat, že úhel $\alpha$ mezi $\vec{E}_{01}$ a $\vec{E}_{02}$ je malý

$\boxed{I(\vec{r})=\frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2\left(E_{01}^2+E_{02}^2+2E_{01}E_{02}\cos\alpha\cos\delta_{12}(\vec{r})\right)}$

$\delta_{12}(\vec{r})$ … fáz. rozdíl → $\cos\alpha\cong 1$ ⇒ IF téměř souhlasně polarizovaných vln:

$\boxed{I(\vec{r})=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\delta_{12}(\vec{r})}$ $\quad I_1=\frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2E_{01}^2$, $\quad I_2=\frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2E_{02}^2$

$\varphi_1(\vec{r})=\vec{k}_1\cdot\vec{r}+\delta_{01}$

$\varphi_2(\vec{r})=\vec{k}_2\cdot\vec{r}+\delta_{02}$ $\quad$ fáz. rozdíl $\delta_{12}(\vec{r})=\varphi_1(\vec{r})-\varphi_2(\vec{r})$

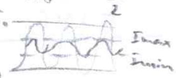
IF člen ($\alpha=0,\pi$ max. odchylka od $I=\sum I_m$; $\alpha=\frac{\pi}{2}$ vymizí IF člen → není odchylka od $I=\sum I_m$)

spec. $I_1=I_2=I_0$

$\boxed{I(\vec{r})=4I_0\cos^2\frac{\delta_{12}(\vec{r})}{2}}$

$I(\vec{r})=2I_0+2I_0\cos\delta_{12}=2I_0(1+\cos\delta_{12})=4I_0\left(\frac{1+\cos\delta_{12}}{2}\right)=4I_0\cos^2\frac{\delta_{12}}{2}$

⇒ $I\in[0,4I_0]$




viditelnost – popis kontrastu IF proužků

$\boxed{V=\frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}}}$ $\quad V\in[0,1]$

$I_{max}=4I_0$, $I_{min}=0$ ⇒ $V=1$

$I_{max}=I_{min}$ ⇒ $V=0$

$\boxed{\text{IF max}: \cos\delta_{12}(\vec{r})=1 \Rightarrow \delta_{12}(\vec{r})=2m\pi}$

$\boxed{\text{IF min}: \cos\delta_{12}(\vec{r})=-1 \Rightarrow \delta_{12}(\vec{r})=(2m-1)\pi}$

$\delta_{12}(\vec{r})=\varphi_1(\vec{r})-\varphi_2(\vec{r})=k\Delta_0=k_0 n\Delta_0=k_0\Delta$

IF obrazec: delokalizovaný (je všude), reálný (je vidět v rozptýleném světle na matnici)

$\Delta=n\Delta_0$ … rozdíl optických drah

$\Delta_0$ … rozdíl geom. drah

## dvousvazková IF vln $\vec{k}_1 \parallel \vec{k}_2$

→ $k_1=\frac{\omega}{c}n=k_2$ (monochr. vlna) ⇒ $|\vec{k}_1|=|\vec{k}_2|$ a pokud $\vec{k}_1\parallel\vec{k}_2$ ⇒ $\vec{k}_1-\vec{k}_2=0$, (také předpokládáme $\vec{E}_1\parallel\vec{E}_2$ souhlasně polarizované)

$\varphi_1(\vec{r})-\varphi_2(\vec{r})=(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\cdot\vec{r}+\delta_{01}-\delta_{02}=\delta_{01}-\delta_{02}=\delta_{12}$ → nezávisí na $\vec{r}$ ⇒ $\boxed{I(\vec{r})=\frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2\left(E_{01}^2+E_{02}^2+2E_{01}E_{02}\cos\delta_{12}\right)}$ → také nezávisí na $\vec{r}$

⇒ v IF prostoru se neobjeví střídání světlých a tmavých míst ale celý IF prostor se rozsvěcí a zhasíná v závislosti na $\delta_{12}$, ale $\nexists$ v reálném světě nelze realizovat jednu homog. rovinnou vlnu, ani se nezbavíme jevů difrakce (které mnohdy přispějí vln o různých směrech vlnových vektorů)

(přesto tento popis užitečný k objasnění činnosti interferometrů)

## Interferometry

- dvousvazkové (Michelsonův, Jaminův, Machův–Zehnderův, …)
- vícesvazkové (Fabryův–Pérotův, …)

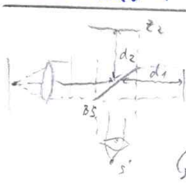
můžeme dělit i na základě principu vzniku IF: dělení amplitudy (např. Michelsonův), dělení vlnoplochy (Fizeaův)

KO – kolimační optika

FO – fokusační optika

### Michelsonův IF

→ rozdíl opt. drah mech. posuvem zrcadel




ideál:

dráhový rozdíl $\Delta l=2(d_1-d_2)$

fázový rozdíl $\delta_{12}=k\Delta l=2k(d_1-d_2)$

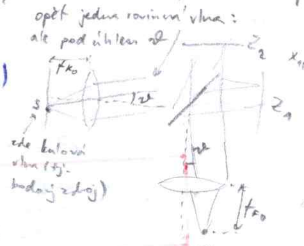
$=\frac{4\pi}{\lambda}(d_1-d_2)=\frac{4\pi}{\lambda_0}n(d_1-d_2)$ ← index lomu vzduch. prostředí

$\vec{k}_1\parallel\vec{k}_2$

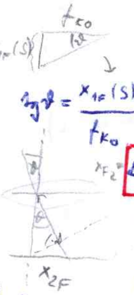
$\delta_{12}(\vec{r})=\underbrace{(\vec{k}_1-\vec{k}_2)}_{0}\cdot\vec{r}+\delta_{01}-\delta_{02}=\delta_{12}$

$\neq f(\vec{r})$ ⇒ není prostorová modulace

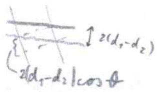
opět jedna rovinná vlna: ale pod úhlem $\vartheta$




ze kolové vlny (z jednoho zdroje)




$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{x_{1F}(S)}{f_{KO}}$




$\boxed{\Delta x(S')=f\operatorname{tg}\vartheta\approx f\vartheta}$

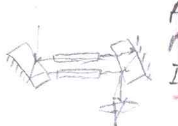
vzdálenost od osy interferometru

(případ $\vec{k}_1\nparallel\vec{k}_2$) → mnoho rovinných vln pod různými úhly: oblast zdroje S (ohnisková rovina KO) vyplněna světlem: body vyzařující kulové vlny které se po průchodu kolimátorem mění na rovinné vlny, pro některé body splněna podm. konstruktivní IF pro jiné destr. IF na základě úhlu

pro malé úhly

### Jaminův IF

→ rozdíl opt. drah změnou fáz. rychlosti



fáz. rozdíl určen indexem lomu plynu v kyvetě (ten je fci tlaku)

$I_{S'}[n(p_{plyn})]=I_{MAX}(S')\cos^2\left\{\left[n(p_{plyn})-1\right]\frac{\omega}{c}d\cos\vartheta\right\}$

$x_F(S')=f_{FO}\operatorname{tg}\vartheta$ ← $\operatorname{tg}\vartheta=\frac{x_{2F}(S')}{f_{FO}}$

pro malé úhly → $x_F(S')\approx f_{FO}\vartheta$

$\delta(S')=\frac{4\pi}{\lambda_0}n(d_1-d_2)\cos\vartheta$

$\delta(\vartheta)$ $=2m\pi$ IF max

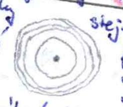
$=(2m+1)\pi$ IF min

$I_{S'}(x_F,y_F)\cong I_{max}(S')\cos^2\delta(S')$

$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{\sqrt{x_F^2+y_F^2}}{f}$

ze symetrie $\delta=$ konst. jsou v ohniskové rovině kružnice

Haidingerovy kroužky (proužky) (kroužky stejného sklonu)

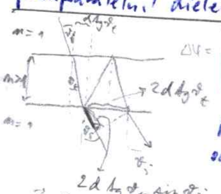


fáz. rozdíl závisí na úhlu dopadu vlny $\vartheta$

obrazec: reálný a lokalizovaný právě jen v ohniskové rovině

→ bez FO: IF obrazec virtuální, lokalizovaný v $z\to-\infty$

### planparalelní dielektrická deska




$\Delta\psi=$ $\boxed{\delta_{12}=2dk_0 n\cos\vartheta_t}$

průchod: $\Delta\psi=2dk_0\cos\vartheta_t$

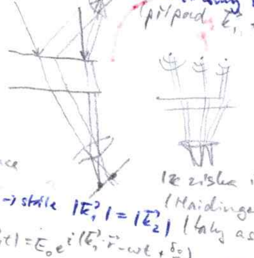
odraz: $\Delta\psi=2dk_0\cos\vartheta_t-\pi_0$ ← odražená vlna na opt. hustším pr.

$2d\,\operatorname{tg}\vartheta_t\sin\vartheta_i$

pro $\vec{k}_1\parallel\vec{k}_2$ opět zhasínání a rozsvěcování IF prostoru bez modulace

abychom viděli IF proužky → FO

IF obrazec: virtuální, lokalizovaný v $\infty$ (případ $\vec{k}_1\nparallel\vec{k}_2$)

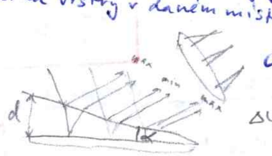


lze získat i kroužky stejného sklonu (Haidingerovy kroužky)

### Fizeauovy proužky

(kroužky stejné tloušťky)

parametrem splnění IF podmínky konstruktivní (fázový rozdíl) → tloušťka vrstvy v daném místě

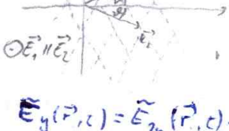



$d=x\operatorname{tg}\alpha\approx x\alpha$

$\Delta\psi\cong 2dk_0 n\cos\vartheta_t-\pi$

## dvousvazková IF vln $\vec{k}_1 \nparallel \vec{k}_2$

→ monochr. vlny → stále $|\vec{k}_1|=|\vec{k}_2|$




$\vec{k}_1=(k\sin\vartheta,0,k\cos\vartheta)$

$\vec{k}_2=(-k\sin\vartheta,0,k\cos\vartheta)$

(taky asi předp. $\vec{E}_1\parallel\vec{E}_2$)

$\tilde{E}_{1y}(\vec{r},t)=E_0e^{i(\vec{k}_1\cdot\vec{r}-\omega t+\frac{\delta_0}{2})}$

$\tilde{E}_{2y}(\vec{r},t)=E_0e^{i(\vec{k}_2\cdot\vec{r}-\omega t-\frac{\delta_0}{2})}$

IF obrazec delokalizovaný a reálný (lze vidět bez optiky)

v místě $\vec{r}=0,\ t=0$ fáz. rozdíl $\delta_0$ → rozdílné $I$ mezi oběma vlnami

$\tilde{E}_y(\vec{r},t)=\tilde{E}_{1y}(\vec{r},t)+\tilde{E}_{2y}(\vec{r},t)=E_0e^{i(k_zz-\omega t)}\left(e^{i(k_xx+\frac{\delta_0}{2})}+e^{-i(k_xx+\frac{\delta_0}{2})}\right)$

$\tilde{E}_y(\vec{r},t)=2E_0\cos\left(k_xx+\frac{\delta_0}{2}\right)e^{i(k_zz-\omega t)}$ ⇒ modulace intenzity ve směru x

$I=\langle u_E\rangle_T=\frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2\,\tilde{\vec{E}}\cdot\tilde{\vec{E}}^*=4I_0^2\cos^2\left(k_xx+\frac{\delta_0}{2}\right)=2I_0\left(1+\cos(2k_xx+\delta_0)\right)$

## IF N vln s rovnoběžnými $\vec{k}$, stejnými amplitudami $E_0$ a stejnými fáz. rozdíly $\delta$

fáz. posun mezi m-tou a m+1 vlnou $\delta_{m,m+1} = \delta$, uvažujeme rovinné vlny s vektorem $\vec{k} = (k\sin\vartheta, 0, k\cos\vartheta)$ nezávislý na m

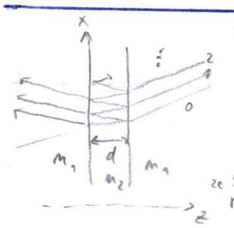
pro m-tou vlnu ($m \in [0, N-1]$) platí: $E_m(x,z,\vartheta,t) = E_0 e^{ikx\sin\vartheta} e^{ikz\cos\vartheta} e^{-i\omega t} e^{im\delta} = E_{m=0}\, e^{im\delta}$

součet N vln: $E_{tot} = E_{m=0} \sum_{m=0}^{N-1} e^{im\delta} = E_{m=0} \frac{1-e^{iN\delta}}{1-e^{i\delta}}$

relativní intenzita: $E_{tot} E_{tot}^* = E_{m=0} E_{m=0}^* \frac{1-e^{iN\delta}}{1-e^{i\delta}} \cdot \frac{1-e^{-iN\delta}}{1-e^{-i\delta}} = |E_0|^2 \frac{\sin^2(N\frac{\delta}{2})}{\sin^2(\frac{\delta}{2})}$ zde přeskočeno pár kroků !!

$\delta = 2\pi \frac{p}{N}$ $\delta \neq 2m\pi$, $p, m \in \mathbb{Z}$ $\frac{p}{N} \notin \mathbb{Z}$ ⟹ v závislosti na $\delta$ homogenní modulace celého IF prostoru → zhášení, rozsvícení celého prostoru

## IF ∞ vln s rovnoběžnými $\vec{k}$, různými amplitudami a stejnými fáz. rozdíly $\delta$




dopadající vlna: $\tilde{\vec{E}}_i = \tilde{\vec{E}}_{0i} e^{ik_1 x\sin\vartheta_i} e^{ik_1 z\cos\vartheta_i} e^{-i\omega t}$ $z<0$

několik z vln ale i jako dopadající vlna

$\tilde{\vec{E}}_{t0} = t_{12} t_{21} e^{i\frac{\delta}{2}} \tilde{\vec{E}}_{0i}$ $\frac{\delta}{2}$ ... fáz. tloušťka vrstvy

$\tilde{\vec{E}}_{t2} = t_{12}(r_{21} r_{12})^2 t_{21} e^{i\frac{\delta}{2}} e^{i2\delta} \tilde{\vec{E}}_{0i}$ (tj. fáz. rozdíl při jednom průchodu vrstvou)

ze Stokesových vztahů $r_{12} = -r_{21} = r$

l-tá prošlá vlna: $\tilde{\vec{E}}_{tl} = t_{12} t_{21} e^{i\frac{\delta}{2}} r^{2l} e^{il\delta} \tilde{\vec{E}}_i$

celkové pole za deskou $\tilde{\vec{E}}_t = t_{12} t_{21} e^{i\frac{\delta}{2}} \tilde{\vec{E}}_i \underbrace{(1 + r^2 e^{i\delta} + r^4 e^{i2\delta} + \dots)}_{\text{geom. řada}}$

$\tilde{\vec{E}}_t = t_{12} t_{21} e^{i\frac{\delta}{2}} \frac{1}{1 - r^2 e^{i\delta}} \tilde{\vec{E}}_i$

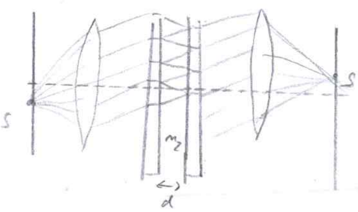
$I_t = \frac{1}{2} \varepsilon_0 n^2 \tilde{\vec{E}}_t \cdot \tilde{\vec{E}}_t^* = \dots$ úpravy + užití Stokesových vztahů (z → to má být asi $\frac{1}{4}$)

$$\boxed{I_t = \frac{I_0}{1 + F\sin^2\frac{\delta}{2}}}$$ ... Airyho funkce

$$\boxed{F = \frac{4R}{(1-R)}}$$ ... jemnost

výkonový koef. odrazu $R = r^2$

### Fabryův-Pérotův IF




intenzita obrazu S' je modulována Airyho fcí

zda bude obraz intenzivní nebo temný rozhoduje: d, $n_2$, úhel $\vartheta_t$ (tedy poloha bodu S)

třeba piezoelektricky, tlak plynu

⟹ vysoká ostrost ⟹ velmi přesná měření

Monochromatické (monoenergetické) vlny:

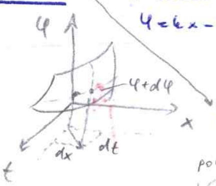
- proces neohraničený v čase ani prostoru: $t \in (-\infty, \infty)$, $x \in (-\infty, \infty)$

→ idealizace → fyzikálně nereálné → nenese informaci !

Realita ⟹ kvazimonochromatické vlny $\Delta\omega \neq 0$, $\Delta\omega \ll \omega$ (malé rozdíly frekvencí)

## FÁZOVÁ RYCHLOST

$$\boxed{v_p = -\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_x}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_t}}$$




1D vlna: $E = E_0\cos(kx - \omega t + \varphi_0)$

$\varphi = kx - \omega t + \varphi_0$ ... fáze vlny → $\varphi(x,t)$

$d\varphi$ ... změna fáze

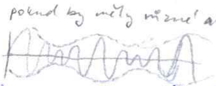
$d\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_t dx + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_x dt$

propagace konst. fáze v čase $\frac{d\varphi}{dt} = 0$

$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_t \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_p} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_x \frac{dt}{dt} = 0$

$$\boxed{v_p = \frac{\omega}{k}}$$

pokud by měly různé amplitudy → modulace nemá dokonalou



## GRUPOVÁ RYCHLOST

$$\boxed{v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\bar{\omega}}}$$

rychlost šíření obálky

$E_0' = 2E_0\cos(\Delta k z - \Delta\omega t)$

$v_g = -\frac{\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\right)_z}{\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right)_t} = -\frac{-\Delta\omega}{\Delta k}$

$$\boxed{v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}}$$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

2 1D vlny stejné amplitudy: $E_1 = E_0\cos(k_1 z - \omega_1 t)$, $E_2 = E_0\cos(k_2 z - \omega_2 t)$ } $E = E_0[\cos(k_1 z - \omega_1 t) + \cos(k_2 z - \omega_2 t)]$

$= 2E_0 \cos\frac{(k_1+k_2)z - (\omega_1+\omega_2)t}{2} \cos\frac{(k_1-k_2)z - (\omega_1-\omega_2)t}{2}$

zavedeme: nosná frekvence $\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$ $\bar{k} = \frac{1}{2}(k_1+k_2)$

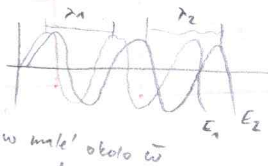
frekvence modulační (obálky) $\Delta\omega = \frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)$ $\Delta k = \frac{1}{2}(k_1-k_2)$

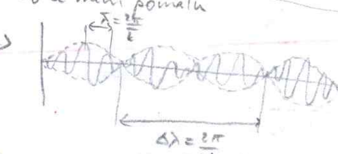
$\omega_1 \sim \omega_2$

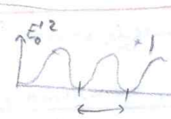
$\bar{\omega} \gg \Delta\omega$

$$\boxed{E = 2E_0\cos(\bar{k}z - \bar{\omega}t)\cos(\Delta k z - \Delta\omega t)}$$

$E_0'$ se mění pomalu

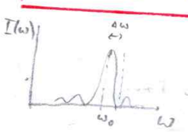



pro $\Delta\omega$ malé okolo $\bar{\omega}$

→ $v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\bar{\omega}}$




$f(t) = \begin{cases} e^{-i\omega_0 t} & -\Delta t \leq t \leq \Delta t \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

Fourierova transf.

$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} = \int_{-\Delta t}^{\Delta t} e^{i(\omega-\omega_0)t} dt = \frac{\sin(\omega-\omega_0)\Delta t}{(\omega-\omega_0)\Delta t} 2\Delta t = \mathrm{sinc}[(\omega-\omega_0)\Delta t] 2\Delta t$ (interval zapnutí $2\Delta t$)

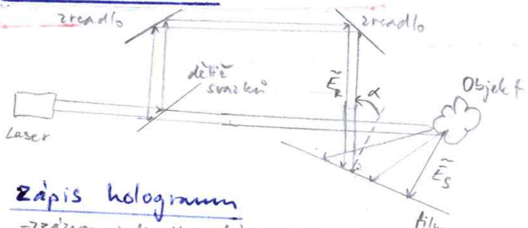
$I(\omega) \sim |F(\omega)|^2$

modulace (signál) se šíří rychlostí $v_g$, která může být větší, stejná nebo menší než fázová rychlost nosné vlny ⟹ každá reálná světelná vlna je omezena v čase (je zapnuta a detekována ve specifickém čase) → takový pulz je složen z mnoha sinusových vln různé amplitudy a fáze

→ vlna konečného trvání představuje frekvenční pásmo (ortlivené spektrální charakteristiky, i kdyby během doby zapnutí bylo $\omega_0$ konstantní)

$\Delta\omega\Delta t \equiv \pi$ od $\omega_0$ do 1. nuly sinu → analog. Heisenbergovy relace neurčitosti

## HOLOGRAFIE




Výsledné pole na filmu: $\tilde{E}_F = \tilde{E}_R + \tilde{E}_S$

Intenzita světla na filmu

$I_F \sim \tilde{E}_F \tilde{E}_F^* = (\tilde{E}_R + \tilde{E}_S)(\tilde{E}_R^* + \tilde{E}_S^*)$

$= A_R^2 + A_S^2 + A_R A_S e^{i(\varphi-\theta)} + A_R A_S e^{i(\theta-\varphi)}$

→ touto intenzitou je exponován film

### Zápis hologramu

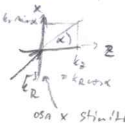
→ záznam intenzity a fáze pomocí IF s ref. vlnou

propustnost filmu:

$$\boxed{t(x,y) = t_0 - a I_F(x,y)}$$

materiálová konstanta (vyjadřuje zčernání filmu), záznam hologramu

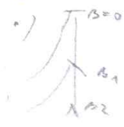
Ref. vlna: → rovinná vlna




$\tilde{E}_R(x) = A_R e^{i(k_R x\sin\alpha - \omega t)} \approx A_R e^{i(k_R x - \omega t)}$ ($\varphi(x)$)

$= A_R e^{i(\varphi - \omega t)}$

Signální vlna ... obecné složité pole (třeba předp. kulovou vlnu)

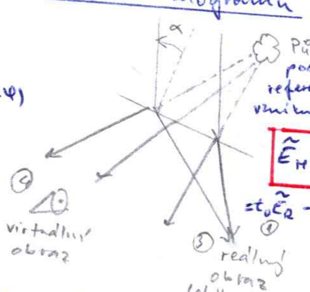


$\tilde{E}_S(x) = A_S e^{i(k_S x_\beta - \omega t)} = A_S e^{i(\theta - \omega t)}$ ($\theta(x)$)

$\theta = f(x,y)$

$A_S = f(x,y)$

### Zobrazení hologramu




Pův. objekt hologram za identických podmínek jako při expozici pouze referenční vlnou pod stejným úhlem → osvětlíme-li výsledný vznikne po průchodu ref. vlny hologramem

$$\boxed{\tilde{E}_H = t(x,y)\tilde{E}_R} = t_0\tilde{E}_R - a\{\dots\} =$$

$= t_0\tilde{E}_R - a\{(A_R^2 + A_S^2)\tilde{E}_R + A_R^2 A_S e^{i(2\varphi-\theta-\omega t)} + A_R^2 A_S e^{i(\theta-\omega t)}\}$ ① ② ③ ④

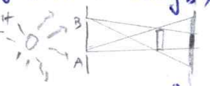
①+② ... vlna ve směru šíření původní ref. vlny → nenese žádnou informaci

③ $\sim A_R^2 A_S e^{i(2\varphi-\theta-\omega t)}$ ... vlna fáz. posunutá vůči původní signální vlně (sbíhavá kulová vlna)

# 5 DIFRAKCE (skalární popis) = odchýlení světla od přímočarého šíření (ohyb) způsobené fyzickou překážkou

z fyzikálního hlediska se jedná o jev interference

Grimaldiho experiment 1665




výsledky ze začátku 19. st. (Fresnelovy myšlenky inspirované Huygensem)

paprsek = normála k vlnoploše

apertura = nepropustné stínítko s otvorem

pokud rozměry difr. objektu $\sim \lambda$

=> problém hlavně zanedbání vlnové povahy pole v otvoru není shodné s nabíhající vlnou a překážka není dokonale černá

spokojíme se s 2D zjednodušením (tj. difrakce na 2D objektech), teorie vychází z předpokladů:

1) ignorování vektorový charakter
2) pole je monochromatické s čas. závislostí $e^{-i\omega t}$, pro pole platí skalární Helmholtzova rov. $\boxed{\Delta E + k^2 E = 0}$
3) difraktující objekty (překážky a otvory) jsou rovinné, 2D a jsou podstatně větší než vlnová délka záření, překážky jsou dokonale „černé" → úplně absorbují záření
4) pole v rovině apertury je stejné jako kdyby zde stínítko nebylo (pole v otvoru totožné s polem nabíhající vlny) „Kirchhoffova okrajová podmínka"
5) místo pozorování je od difraktujícího objektu podstatně více vzdáleno než vlnová délka záření

označení: $E(x,y,z,t) = \underline{E(x,y,z)}\, e^{-i\omega t}$ ... skalární pole (t) → (v difrakčních vztazích je zvykem nevypisovat časové závislosti tj. $e^{-i\omega t}$ protože předp. monochr. vlny stejné frekvence)

prostorově závislá skalární komplexní veličina → skalární obdoba komplexní amplitudy elektrického pole

→ skalární kulová (kulové vlnoplochy = plochy konst. fáze) a navíc kulově symetrická (na vlnoploše i konst. amplitudy) vlna vybíhající z obecného bodu $Z$ je $E(x,y,z) = \frac{E_{0Z}}{s} e^{iks}$, kde $s = \sqrt{(x-x_Z)^2+(y-y_Z)^2+(z-z_Z)^2}$, $E_{0Z}$ ...amplituda pro $s=1$, $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

neexistuje elektromagnetická (vektorová, alespoň částečně příčná) vlna s kulovou symetrií amplitudy

Huygens-Fresnelův princip

↳ příspěvek sekundárních vlnek k $E(x,y,z)$ od elementu integrační plochy $dS$, který se nachází v místě $(X,Y,Z)$ se v různých modelech různí:

- kulová, kulově symetrická sekundární vlnka $dE(x,y,z) = E(X,Y,Z)\frac{e^{ikr}}{r}dS$, kde $r = \sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2}$
- aproximace kulové vlny vlnou parabolickou (FRESNELOVA APROXIMACE)
- vztahy zahrnující směrové faktory $dE(x,y,z) = \frac{-i}{\lambda}E(X,Y,Z)\frac{e^{ikr}}{r}K(\vartheta)\,dS$ → Fresnelův-Kirchhoffův integrál; → 2 typy Rayleighova-Sommerfeldova integrálu

jako relativní intenzitu bereme $I(x,y,z) = E(x,y,z)E^*(x,y,z)$, $I_0$ ...maximální hodnota $I$ v difrakčním obrazci

## FRESNEL-KIRCHHOFFŮV INTEGRÁL

$$\boxed{E(x,y,z) = \frac{-i}{\lambda}\iint_{S_A} E(X,Y,0)\frac{e^{ikr}}{r}K(\chi)\,dS_A}$$

→ směrový faktor

paraxiální aproximace $\longrightarrow K(\chi) \approx 1$

využívají obě Fresnelova i Fraunhoferova aproximace

$$\boxed{E(x,y,z) = \frac{-i}{\lambda}\iint_{S_A} E(X,Y,0)\frac{e^{ikr}}{r}\,dS_A}$$

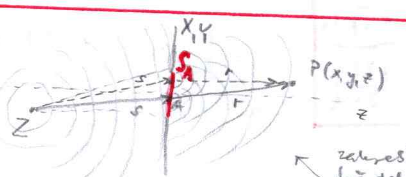
→ popisuje skládání elementárních kulových vln vycházejících z otvoru určeného aperturou v rovině $z=0$

body apertury $(X,Y,0)$, v otevřeném místě apertury A vytváří zdroj Z pole $E(X,Y,0) = E_{0Z}\frac{e^{iks}}{s}$

($dS_A = dX\,dY$) ...integrace probíhá přes rov. vlnoplochu apertury $S_A$

$r = \sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2+z^2}$

malé z




zakresleny pouze dvě difraktované vlny z nekonečně mnoha

## Fresnelova aproximace

[obě aproximace jsou paraxiální a předpokládají že zdroj se nachází blízko osy z, stejně tak pozorovatel

studujeme difrakci v úzkém intervalu úhlů od optické osy, proto ve jmenovateli integrandu položíme $r = z$, v exponentu v čitateli to udělat nelze protože člen $e^{ikr}$ se mění (osciluje) velmi rychle ⇒ Aplikujeme Taylorův rozvoj a nahradíme kulové vlny paraboloidními vlnami:

$$r = \sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2+z^2} = z\sqrt{1+\frac{(x-X)^2+(y-Y)^2}{z^2}} \overset{\text{Taylor}}{\cong} z\left(1+\frac{(x-X)^2+(y-Y)^2}{2z^2}\right) = z + \frac{(x-X)^2+(y-Y)^2}{2z}$$

$(1+x)^\alpha \cong 1 + \alpha x$

$$\frac{e^{ikr}}{r} \cong \frac{e^{ikz}}{z} e^{\frac{ik}{2z}[(x-X)^2+(y-Y)^2]} = \frac{e^{ikz}}{z} e^{ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}} e^{ik\frac{(X^2+Y^2)}{2z}} e^{-ik\frac{(xX+yY)}{z}}$$

celkově:

$$\boxed{E(x,y,z) \cong \frac{-i}{\lambda}\frac{e^{ikz}}{z}e^{ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}}\iint_{S_A}E(X,Y,0)e^{ik\frac{(X^2+Y^2)}{2z}}e^{-ik\frac{(xX+yY)}{z}}\,dX\,dY}$$

platí za podmínky:

$$\boxed{\frac{(x-X)^2+(y-Y)^2}{z^2} \ll 1}$$

→ difrakce na malých otvorech v nepropustné překážce v dostatečné vzdálenosti $z \gg \lambda$ a rozměry otvorů $\gg \lambda$

dlouhé úzké otvory → zjednodušení, řez podmínka se redukuje na $z \gg x - X$ ($z \gg X$)

$\sim 20\lambda$ od apertury

## Fraunhoferova aproximace (aproximace vzdáleného pole)

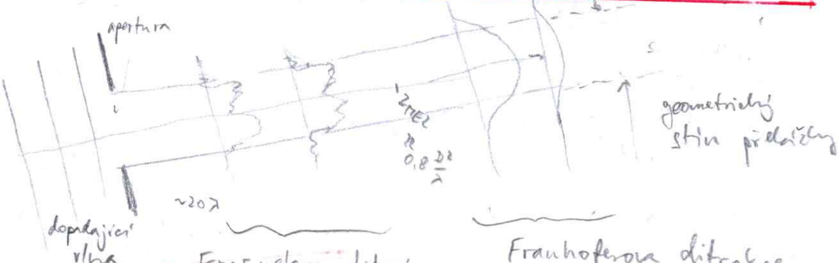
také aproximace na malých otvorech → zanedbání členu $e^{ik\frac{(X^2+Y^2)}{2z}}$

$$\boxed{E(x,y,z) \cong \frac{-i}{\lambda}\frac{e^{ikz}}{z}e^{ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}}\iint_{S_A}E(X,Y,0)e^{-ik\frac{(xX+yY)}{z}}\,dX\,dY}$$

použitelnost závisí na poměru vzdálenosti pozorování a velikosti apertury → použitelná pro vzdálenosti:

$\boxed{e^{ik\frac{(X^2+Y^2)}{2z}} \cong 1}$ ⇒ kruhová apertura $R^2 = (X^2+Y^2)$, $\frac{D^2}{4} = X^2+Y^2$

$$\boxed{z \gg z_{MEZ} = \frac{k}{8}D^2 = \frac{2\pi}{8}\frac{D^2}{\lambda} \approx 0{,}8\frac{D^2}{\lambda}}$$



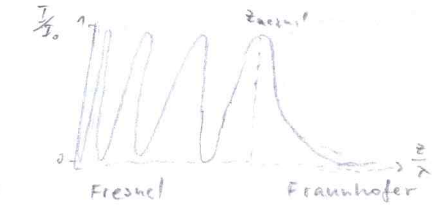

Fresnelova difrakce (intenzita nezasahuje výrazně do geom. stínu)

$\uparrow z$ ⇒ střídání max. a min

Fraunhoferova difrakce (intenzita zasahuje výrazně do geom. stínu)

$\uparrow z$ ⇒ rozšiřuje se profil a intenzita na ose klesá

intenzita na ose z: kruhové apertury




### výpočet difrakčního integrálu:

→ numericky pomocí počítačů i pro složité apertury

→ přibližně pomocí Fresnelových zón

## Babinetův princip

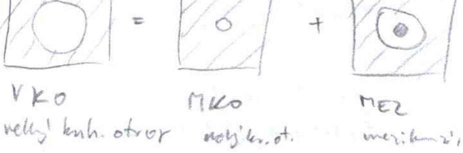
= princip superpozice pro el. pole aplikovaný na výpočet difrakčního integrálu

$$E(x,y,z) = \frac{-i}{\lambda}\iint_{S_A}E(X,Y,0)\frac{e^{ikr}}{r}dS_A = \frac{-i}{\lambda}\sum_j\iint_{S_j}E(X,Y,0)\frac{e^{ikr}}{r}dS_j$$

kde pro plochu apertury platí $S_A = \sum_j S_j$

pro plochy ve stínítku propustné bereme +, plochy nepropustné −

např.

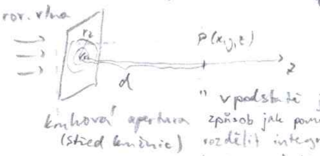


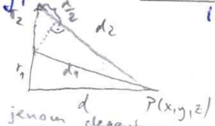

$E_{MEZ} = E_{VKO} - E_{MKO}$

**Fresnelovy zóny** (přibližný výpočet difr. integrálu) ⇒ vlnoplocha v difr. apertuře se rozdělí na **Fresnelovy polovlnové zóny**

= část integrační plochy, ze které sekundární vlny dospějí do místa pozorování s fáz. rozdíly menšími než $\pi$ $\quad \Delta\varphi = \pi = k\Delta_{op} = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta_{op}$

(na primární vlnoploše kmitají „sekundární zdroje" ve fázi → můžeme převést na dráh. rozdíl $< \frac{\lambda}{2}$)




" v podstatě jenom elegantní způsob jak pomocí Babinetova principu rozdělit integrál na jednotlivé sčítance (integrály) které uměli spočítat (byly tabelované)"

$d_1 = d + \frac{\lambda}{2}$

$d_2 = d + 2\frac{\lambda}{2}$

$$\boxed{r_m = \sqrt{\left(d + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 - d^2}}$$

Pythagorova věta

$d_m = d + m\frac{\lambda}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$

kruh $r_1$ ... 1. Fresnelova zóna

mezikruží $r_2, r_1$ - 2. Fresnelova zóna

⋮

mezikruží $r_m, r_{m-1}$ ... $m$-tá Fresnelova zóna

skládání vlnoploch ze sousedních zón: aby sekundární vlny se skládaly konstruktivně

$Z_1$... bod z 1. Fr. zóny, k němu $\exists Z_2$ z 2. Fr. zóny že je v $P$ fáz. r. $\pi$

příspěvek v $P$ od $Z_1$: $E(Z_1, P) = \frac{A}{r_1}e^{ikr_1}$ $\quad$ od $Z_2 = \frac{A}{r_2}e^{ikr_2}$

$E(Z_2 P) = \frac{A}{r_2}e^{i(kr_1+\pi)} = \frac{A}{r_2}e^{ikr_1}\underbrace{e^{i\pi}}_{-1} = -\frac{A}{r_2}e^{ikr_1}$

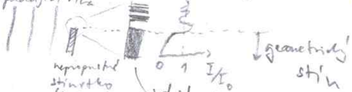
⇒ odečítají se (pouze přibližně protože se amplituda s rostoucí vzdáleností mění) → ne do nuly!

(mohou nahradit čočky)

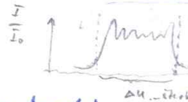
**Fresnelovy zónové desky** = opt. prvky, ve kterých jsou některé (např. sudé) Fr. zóny fyzicky zakryty → difr. obrazec složený pouze z odkrytých zón ⇒ fokusační vlastnosti

Celkově: příspěvky sudých zón se vzájemně sčítají (skládají konstruktivně). Stejně tak příspěvky lichých zón. Příspěvky $\Sigma$ sudých zón a $\Sigma$ lichých zón se vzájemně odečítají (destruktivní IF) → vzhledem ke změnám amplitud, směrovým faktorům a ploch zón je celkový součet (= přibližné řeš. difr. $\int$) nenulový.

**Difrakce na hraně** (Fresnelova aproximace)



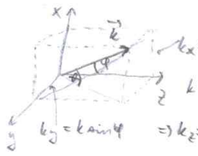

**Difrakce na štěrbině** (Fresnelova aproximace)




Difrakce na obdélníkové apertuře (Fresnelova aproximace)

záleží na rozměrech

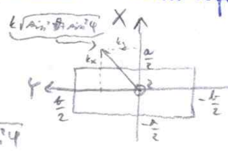
**Difrakce na obdélníkové apertuře** (Fraunhoferova aproximace)




$k_x = k\sin\vartheta$

$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$

$k_y = k\sin\varphi$ $\quad \Rightarrow k_z = \sqrt{1 - \sin^2\vartheta - \sin^2\varphi}$




(pohled proti směru šíření proti ose $z$)

předpokládejme, že na aperturu dopadá rovinná vlna kolmo ⇒ amplituda i fáze v rov. apertury konst.

→ $E(X, Y, 0) = E_0$ (ve Fraunhof. aprox. se již počítá s aprox. malých úhlů $\sin\vartheta \approx \frac{x}{z}$, $\sin\varphi \approx \frac{y}{z}$)

dostáváme:

$$E(x,y,z) \cong \frac{-i}{\lambda z}e^{ikz}e^{ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}}E_0\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ikX\frac{x}{z}}dX\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-ikY\frac{y}{z}}dY$$

$\varphi, \vartheta$ ... úhly difrakce

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ikX\frac{x}{z}}dX = \left[\frac{z}{\lambda}\frac{-z}{kjx}e^{-ikX\frac{x}{z}}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{iz}{kx}\left(e^{-ik\frac{ax}{2z}} - e^{+ik\frac{ax}{2z}}\right) = \frac{iz}{kx}\left(-2i\sin\left(\frac{akx}{2z}\right)\right) = \frac{2z}{kx}\frac{a}{a}\sin\left(\frac{akx}{2z}\right)$$

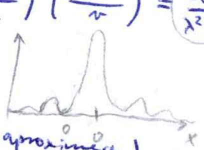
$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ikX\frac{x}{z}}dX = a\frac{\sin\frac{akx}{2z}}{\frac{akx}{2z}} = a\,\mathrm{sinc}(u)$$

hlavní max. $\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$ $\quad$ a první nulový bod $u = \pi = \frac{ax}{2z}\frac{2\pi}{\lambda}$ $\Rightarrow x_1 = \frac{\lambda z}{a}$, analog. $\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-ikY\frac{y}{z}}dY = b\frac{\sin\frac{bky}{2z}}{\frac{bky}{2z}} = b\frac{\sin v}{v} = b\,\mathrm{sinc}(v)$

$$\boxed{I = E(x,y,z)\cdot E^*(x,y,z)} = \left(-\frac{i}{\lambda}\right)\left(\frac{i}{\lambda}\right)\frac{E_0^2a^2b^2}{z^2}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 = \overbrace{\frac{E_0^2}{\lambda^2 z^2}a^2b^2}^{I_0}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 = \boxed{I_0(a,b,z)\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\left(\frac{\sin v}{v}\right)^2}$$

$u = \frac{a\pi x}{\lambda z}$, $\quad v = \frac{b\pi y}{\lambda z}$ $\quad$ tzv. fázové úhly

intenzita podél osy $x$: $I(x, 0, z) \propto \frac{1}{z^2}\frac{\sin^2 u}{u^2}$




analog. osa $y$

Zobrazení Fraunhoferova difrakčního obrazce

**Difrakce na kruhové apertuře** (Fraunhoferova aproximace)

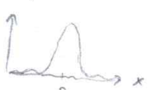
$\rho$ ... polární souřadnice (vzdálenost od osy $z$) $\quad$ $D$ ... průměr apertury

$$\boxed{I(\rho, z) = I_0\left(\frac{2J_1(\xi)}{\xi}\right)^2} \qquad \boxed{\xi = \frac{kD}{2}\sin\vartheta = \frac{\pi D}{\lambda}\sin\vartheta}$$

$J_1$ ... Besselova fce 1. druhu

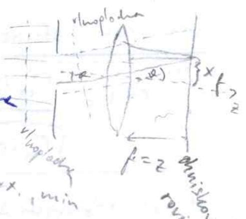
$\xi \cong \frac{kD}{2}\frac{\rho}{z} = \frac{\pi D\rho}{\lambda z}$ ... paraxiální aproximace

→ 1. nulový bod intenzity při $\xi = 1{,}22\pi$



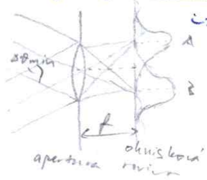

Difrakce na kruhové apertuře (Fresnelova aproximace)

→ různě velký, různý počet, střídání max., min v zdv. na vzdálenosti




$\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{x}{f}$

**Rayleighovo kritérium** (rozlišitelnosti obrazů dvou bodů)




→ obrazy dvou bodových zdrojů A, B při zobrazení přes difr. aperturu jsou prostorově rozlišitelné
⟺ hlavní max. difr. obrazu bodu A je shodné s prvním minimem difr. obrazu bodu B

$$\boxed{\Delta\vartheta_{min} = 1{,}22\frac{\lambda}{D}}$$

$\Delta\xi = 1{,}22\pi$

$\Delta\xi \cong \frac{kD\rho}{2z} = \frac{\pi D\rho}{\lambda z} = \pi\frac{D}{\lambda}\Delta\vartheta_{min} = 1{,}22\pi$

Fraunhof. aprox. + parax. aprox.

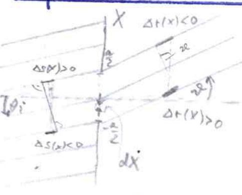
v paraxiální aproximaci

$\frac{x}{z} = \mathrm{tg}\,\vartheta \approx \sin\vartheta \approx \vartheta$ $\qquad \frac{x}{z} \to \frac{x}{f}$

$\frac{y}{z} = \mathrm{tg}\,\varphi \approx \sin\varphi \approx \varphi$ $\qquad \frac{y}{z} \to \frac{y}{f}$

**Difrakce na štěrbině** (Fraunhoferova aproximace) → spíš obdélníková apertura pro $a \ll b$

pak $\frac{\sin v}{v} \to 1$, a taky zde uvažujeme obecný úhel dopadu




znaménková konvence:

$\theta_i, \vartheta$ na opačných stranách normály ⇒ oba kladné

$\theta_i, \vartheta$ na stejné straně normály ⇒ $\vartheta$ záporný

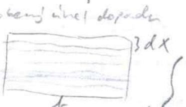
$\Delta s(X) = X\sin\theta_i$

$\Delta r(X) = -X\sin\vartheta$

(horní část, nad osou $z$)

$P$ ... daleko $\quad P(x, 0, z)$

$r_0$ ... vzdálenost $P$ od středu apertury




$dS = b\,dX$

$r = r_0 + \Delta r = r_0 - X\sin\vartheta$

$E(x) = E_0 e^{ikX\sin\theta_i}$ $\quad \sim k_x = k\sin\theta_i$, $\; k_z = k\cos\theta_i$

(kolmý dopad $E(x) = E_0$)

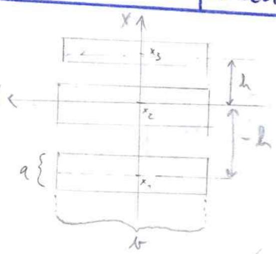
$$E(P) = \frac{-i}{\lambda}\int E(x)\frac{e^{ikr}}{r}dS = \frac{-i}{\lambda}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E_0 e^{ikX\sin\theta_i}\frac{e^{ik(r_0 - X\sin\vartheta)}}{r_0}b\,dX = \frac{-i}{\lambda}\frac{e^{ikr_0}}{r_0}E_0\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{ikX(\sin\theta_i - \sin\vartheta)}b\,dX$$

$$\boxed{E(P) = \frac{-i}{\lambda}\frac{e^{ikr_0}}{r_0}E_0 ab\frac{\sin\left[\frac{ak}{2}(\sin\vartheta - \sin\theta_i)\right]}{\frac{ak}{2}(\sin\vartheta - \sin\theta_i)}}$$

max $\mathrm{sinc}(u)$ je pro $u = 0 \Rightarrow \sin\vartheta - \sin\theta_i = 0$ $\Rightarrow \vartheta = \theta_i$

součet geom. posl. $\sum_{m=1}^{N} a_m = a_1\frac{q^N - 1}{q - 1}$ $\quad a_m = a_1 q^{m-1}$

**Amplitudová difrakční mřížka** (Fraunhoferova aproximace)




$X_m = \left(m - \frac{N+1}{2}\right)h$ $\quad$ počet apertur (lichý!)

$Y_m = 0$ $\quad m = 1, \ldots, N$

$X_1 = \frac{1-N}{2}h < 0$; $X_N = \frac{N-1}{2}h > 0$

prostřední $X_{\frac{N+1}{2}} = 0$

„$(x, y, z)$ ... blízko osy, dostatečně daleko"

$E(P) = N F_N f_1$

$f_1$ ... difrakce od jedné apertury

$NF_N$ ... IF od souboru apertur (součet rovinných vln $F_N$)

$X_m = \left(m - \frac{N+1}{2}\right)h$

$$F_N = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} e^{-ikX_m\sin\vartheta} = \frac{1}{N}e^{ik\frac{N+1}{2}h\sin\vartheta}\sum_{m=1}^{N} e^{-ikmh\sin\vartheta} = \left|\eta = \frac{kh}{2}\sin\vartheta\right|$$

$$= \frac{1}{N}e^{i\eta(N+1)}\sum_{m=1}^{N} e^{-2i\eta m} = \frac{1}{N}e^{i\eta N}\overbrace{e^{i\eta}e^{-2i\eta}}^{e^{-i\eta}}\frac{1 - e^{-i2\eta N}}{1 - e^{-i2\eta}}$$

$$= \frac{1}{N}\frac{e^{i\eta N} - e^{-i\eta N}}{e^{i\eta} - e^{-i\eta}} = \frac{1}{N}\frac{\sin N\eta}{\sin\eta}$$

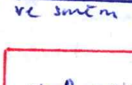
Veis, vzdáleno: $a_1$, odraz

$$F_N = \frac{1}{N}\frac{\sin(N\eta)}{\sin\eta}$$

maxima: $\lim_{\eta\to m\pi}\frac{\sin N\eta}{N\sin\eta} = 1 \Rightarrow \eta = \frac{kh}{2}(\sin\vartheta - \sin\theta_i) = m\pi$

$$\boxed{d(\sin\vartheta_2 \pm \sin\vartheta_1) = m\lambda}$$

průchod, odraz




$d = h$ vzdálenost štěrbin

**MŘÍŽKOVÁ ROVNICE**

$$\boxed{I(x, 0, z) \cong I_0\left(\frac{\sin(N\eta)}{N\sin\eta}\right)^2\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\left(\frac{\sin v}{v}\right)^2} = I_0 F_N^2 \cdot f_1^2$$

při dopadu rovinné vlny a pod úhlem $\theta_i$ nastane interferenční max. intenzity řádu $m$ ve směru difrakce $\vartheta_m$

$\theta_i = 0$

$\eta = \frac{kh}{2}\sin\vartheta$, $\quad u = \frac{ak}{2}\sin\vartheta$, $\quad v = \frac{bk}{2}\sin\varphi$

$\theta_i \neq 0$ $\quad \eta = \frac{kh}{2}(\sin\vartheta - \sin\theta_i)$

kolmý dopad $\theta_i = 0, \varphi = 0$

$y \approx 0 \Rightarrow b \gg a \Rightarrow \frac{\sin v}{v} \to 1$ $\quad I(x, 0, z) \cong I_0\left(\frac{\sin N\eta}{N\sin\eta}\right)^2\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$

$$\boxed{\sin\vartheta_m - \sin\theta_i = \frac{\lambda}{h}m}$$

maxima fce $F_N$ ... interferenční maxima ⇒ poloha hlavních interferenčních maxim $F_N (m \neq 0)$ závisí na vlnové délce $\lambda$

maxima fce $F_1$ ... difrakční maxima → při současném ozáření více vlnovými délkami → IF maxima v různých místech pro různá $\lambda$

pro spektroskopii je podstatné jak malý rozdíl vln. délek $\lambda$ jsme schopni difr. mřížkou rozlišit

**rozlišovací schopnost** $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$, $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$

$$\boxed{R_{Dm} = \frac{\lambda_1}{\Delta\lambda} = Nm}$$

N ... celkový počet ozářených štěrbin
m ... řád maxima IF fce $F_N$ (řád difrakčního max.)

**úhlová disperze**
$$\boxed{D_\vartheta = \left.\frac{d\vartheta}{d\lambda}\right|_{\theta_i = konst.} = \frac{m}{h\cos\vartheta}}$$

**volný spektrální interval** = interval vln. délek, pro které se difr. obraz na detektoru pro řád $m$ nepřekrývá s difr. obrazem pro řád $(m+1)$ - tj. vedlejší maximum

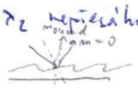
**lineární disperze**
$$\frac{dx_f}{d\lambda} = f_{F0}\frac{d\vartheta_m}{d\lambda} = f_{F0} D_{\vartheta m}$$

pro $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ můžeme spektrum dobře zaznamenat pokud $\vartheta_m$ paprsku $\lambda_2$ nepřesáhne difr. úhel $m+1$ maxima tj. $\vartheta_{m+1}$

z mřížkové rovnice platí $h(\sin\vartheta_{FSm} - \sin\theta_i) = m\lambda_2 = (m+1)\lambda_1$

$$F_{Sm} = \lambda_2 - \lambda_1 = \left(\frac{m+1}{m} - 1\right)\lambda_1 = \frac{\lambda_1}{m}$$

**mřížky na odraz** (s povrchovým reliéfem) Blejzovaná mřížka



# 6 KOHERENCE

= korelace mezi různými částmi pole v místech a časech; popisujeme pomocí korelačních funkcí (omezíme se na korelační fce 2. řádu)

**korelační fce** (2. řádu) všechny E by měla být správně s vlnovkou tj. $\tilde{E}$

$$\Gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \langle E_1(\vec{r}_1, t+\tau) E_2^*(\vec{r}_2, t)\rangle_{t_D} = \frac{1}{t_D}\int_{-t_D/2}^{t_D/2} E_1(\vec{r}_1, t+\tau) E_2^*(\vec{r}_2, t)\,dt$$

($t_D$ ... čas na detektoru) → vyjadřuje korelaci elektrického pole v místech $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ v časech vzdálených o $\tau$ (tzv. časová koherence)

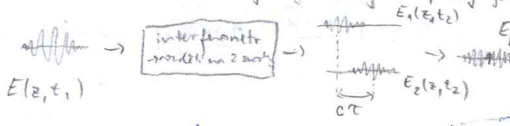
$$\Gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau) = \langle E_1(\vec{r}_1, t+\tau) E_1^*(\vec{r}_1, t)\rangle_{t_D} = \Gamma_{11}(\tau)$$ ... korelační fce pole v jednom místě $(\vec{r}_1)$ a v časech vzdálených o $\tau$

$$\Gamma_{22}(\vec{r}_2, \vec{r}_2, \tau) = \langle E_2(\vec{r}_2, t+\tau) E_2^*(\vec{r}_2, t)\rangle_{t_D} = \Gamma_{22}(\tau)$$

**kvazimonochromatické vlnění** (monochromatické rovinné vlny) - signál skládající se z mnoha frekvencí, jejichž frekvence se nacházejí v úzkém intervalu $\Delta\omega$ kolem $\omega$ (centrální frekvence)

$$\boxed{\tilde{E}(t) = A(t) e^{i(\varphi(t) - \omega t)}} = A(t) e^{i\phi(t)}$$ ... komplexní analytický signál, $A(t)$ ... amplituda, která se mění s časem mnohem pomaleji než $\cos\omega t, \sin\omega t$

→ ke studiu koherence je nejvhodnější IF, kdy jsou do místa detekce přivedeny vlny, které prošly různou opt. dráhou a je mezi nimi odpovídající čas. rozdíl




$E_D = E_1(t+\tau) + E_2(t)$

výsledná intenzita na detektoru: $I_D(t) = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \langle E_D E_D^* \rangle_{t_D} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \langle (E_1(t+\tau) + E_2(t))(E_1^*(t+\tau) + E_2^*(t))\rangle_{t_D}$

$$= \frac{1}{4}\varepsilon_0 \langle E_1(t+\tau)E_1^*(t+\tau)\rangle_{t_D} + \frac{1}{4}\varepsilon_0 \langle E_1(t+\tau)E_2^*(t)\rangle_{t_D} + \frac{1}{4}\varepsilon_0\langle E_1^*(t+\tau)E_2(t)\rangle_{t_D} + \frac{1}{4}\varepsilon_0\langle E_2(t)E_2^*(t)\rangle_{t_D}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4}\varepsilon_0 \Gamma_{11}(0)}_{I_1} + \frac{1}{4}\varepsilon_0\Gamma_{12}(\tau) + \frac{1}{4}\varepsilon_0\Gamma_{12}^*(\tau) + \underbrace{\frac{1}{4}\varepsilon_0\Gamma_{22}(0)}_{I_2} = I_1 + I_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \cdot \mathrm{Re}\,\Gamma_{12}(\tau)$$

$$I_D = I_1 + I_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \Gamma_{12}(\tau)$$

$$\boxed{I_D = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\mathrm{Re}\{\gamma_{12}(\tau)\}}$$

pro $I_1 = I_2 = I_0$: $\longrightarrow I_D = 2I_0 + 2I_0\mathrm{Re}\{\gamma_{12}(\tau)\} = 2I_0(1 + \mathrm{Re}\{\gamma_{12}(\tau)\})$

**komplexní stupeň koherence**

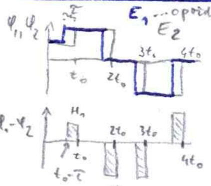
$$\boxed{\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)}\sqrt{\Gamma_{22}(0)}}}$$

**časová koherence**: pulz rozdělen interferometrem na 2 pulzy, které se pohybovali po různých opt. drahách → časový rozdíl obou pulzů: $\tau = \frac{d_2 - d_1}{c}$ (dráhy pulzů)

k IF dojde pouze pokud je menší než (časová) délka pulzu; pokud je větší k IF nedojde (pulzy se na časové ose nepřekrývají!)

**Model fázových skoků** → statistické chování světla, předp. že se fáze náhodně mění po průměrné době $t_0$; interferometr vytvoří časový rozdíl $0 \leq \tau \leq t_0$

pak $E_D = E_1(t+\tau) + E_2(t)$




$$E_1 = E_0 e^{i\varphi(t+\tau)} e^{-i\omega(t+\tau)}$$
$$E_2 = E_0 e^{i\varphi(t)} e^{-i\omega t}$$

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle E_1 E_2^*\rangle_{t_D} = E_0^2 \langle e^{i(\varphi(t+\tau) - \varphi(t))}\rangle_{t_D} e^{-i\omega\tau} = E_0^2\left(1 - \frac{\tau}{t_0}\right)e^{-i\omega\tau}$$

pro středování zvolíme dlouhý čas. interval $Nt_0$ (N velké) potom $\langle e^{i\varphi(t+\tau) - i\varphi(t)}\rangle_{t_D} = \frac{1}{Nt_0}\left(\int_0^{t_0-\tau} e^{i0}dt + \int_{t_0-\tau}^{t_0} e^{iH_1}dt + \int_{t_0}^{2t_0-\tau} e^{i0}dt + \int_{2t_0-\tau} e^{iH_2}dt + \dots\right)$

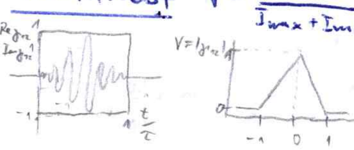
$$= \frac{1}{Nt_0}\left(N(t_0 - \tau) + \tau\sum_{i=1}^{N} e^{iH_n}\right)$$ na velkém počtu interv. se střídají normálně; s velkou pravděpodobností $\left|\sum_{i=1}^{N} e^{iH_n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{N}\cos H_n}_{\sim 0} + i\underbrace{\sum \sin H_n}_{\sim 0}\right| \Rightarrow = \left(1 - \frac{\tau}{t_0}\right)$

$$\Gamma_{11}(0) = \langle E_1 E_1^*\rangle_{t_D} = E_0^2 = \Gamma_{22}(0)$$

$$\Gamma_{12}(\tau) = E_0^2\left(1 - \frac{\tau}{t_0}\right)e^{-i\omega\tau} \to \gamma_{12}(\tau) = \left(1 - \frac{\tau}{t_0}\right)e^{-i\omega\tau} \to |\gamma_{12}(\tau)| = \sqrt{\gamma_{12}(\tau)\gamma_{12}^*(\tau)} = \left(1 - \frac{\tau}{t_0}\right)$$

**viditelnost** $V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$

$I_D(max) = 2I_0 + 2I_0\left(1 - \frac{\tau}{t_0}\right)$
$I_D(min) = 2I_0 - 2I_0\left(1 - \frac{\tau}{t_0}\right)$
$\Big\} V = \frac{4I_0\left(1 - \frac{\tau}{t_0}\right)}{4I_0}$ $\quad V = \left(1 - \frac{\tau}{t_0}\right)$ $\quad \Rightarrow \boxed{V = |\gamma_{12}(\tau)|}$ pouze koherence prostorová

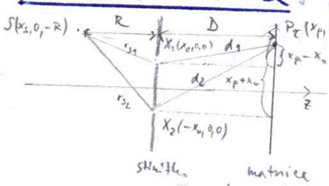



→ viditelnost po časovém intervalu $t_0$ klesá k nule proto definujeme ⇒

$\boxed{\tau_c = t_0}$ ... koherenční čas

$\boxed{l_c = c\tau_c} = ct_0$ ... koherenční délka

**prostorová koherence**: popisuje vzájemnou korelaci záření ve dvou různých bodech prostoru $(X_1(x_0, 0, 0), X_2(-x_0, 0, 0))$




předp. záření je kvazimonochr., pro R velké aproximujeme kulovou vlnu vlnou rovinnou: $E_{X_1} = \frac{A}{r_{s1}} e^{ikr_{s1}} e^{-i\omega t} \approx E_0 e^{ikr_{s1}} e^{-i\omega t}$

→ mezi poli v bodech $X_1, X_2$ $\quad E_{X_2} = \frac{A}{r_{s2}} e^{ikr_{s2}} e^{-i\omega t} \approx E_0 e^{ikr_{s2}} e^{-i\omega t}$

je dráh. rozdíl $r_{s2} - r_{s1}$ a odp. čas. rozdíl $\tau_R = \frac{r_{s2} - r_{s1}}{c}$

$\tau = \frac{d_2 - d_1}{c}$ ... čas. rozdíl mezi difr. otvory a matnicí

celkový čas. rozdíl $\tau_k = \tau_R + \tau$

budeme předp., že změna fáze jednotlivého bodového zdroje $\varphi_A(t)$ je pomalá / je $\varphi(t + \tau_A) - \varphi(t) \doteq 0$ tj. po celkovou dobu $\tau_A = \tau_R + \tau$

požadujeme tedy $\tau \ll \tau_c = t_0$, $\tau_R \ll \tau_c$, $\tau_k \ll \tau_c$, pro 2 zdroje A, B $t_D$ dostatečně dlouhá aby se při integraci v detektoru vykompenzovaly $\langle \varphi_A(t+\tau), \varphi_B(t)\rangle_{t_D} = 0$

$2x_0 = h$ ... vzdálenost difr. otvorů $\quad$ Taylor $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dots$

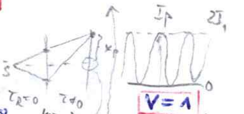
$$d_1 = \sqrt{D^2 + (x_p - x_0)^2} = D\sqrt{1 + \frac{x_p^2 - 2x_p x_0 + x_0^2}{D^2}} \cong D\left(1 + \frac{x_p^2 - 2x_p x_0 + x_0^2}{2D}\right) \quad d_2 = \sqrt{D^2 + (x_p + x_0)^2} \cong \dots D\left(1 + \frac{x^2 + 2x_0 x_p + x_0^2}{2D}\right)$$

$$d_2 - d_1 \approx \frac{2x_0 x_p}{D} = \frac{h x_p}{D} \quad \text{analog.} \quad r_{s2} - r_{s1} \approx \frac{h x_s}{R}$$

**záření z nekoherentních zdrojů**

1) monochr. bodový zdroj na ose (Youngův pokus)

$$I_P = I(x_p) = I_1(1 + \mathrm{Re}\,\gamma_{12}(\tau_k)) = I_1\{1 + \mathrm{Re}\{e^{-i\omega\tau}\}\} = I_1(1 + \cos\omega\tau)$$
($I_1$ ... střední intenzita na matnici)
$$= I_1\left(1 + \cos\left(\frac{\omega}{c}(d_2 - d_1)\right)\right) = I_1(1 + \cos k(d_2 - d_1)) \approx I_1\left(1 + \cos\frac{k h x_p}{D}\right)$$




$\boxed{V = 1}$ kvůli $\tau = 0$ z osové polohy $\tau_R = 0$

2) monochr. bodový zdroj mimo osu

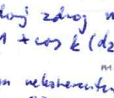
$$I(x_p) = I_2(1 + \cos k(d_2 - d_1 + r_{s2} - r_{s1}))$$

$\boxed{V = 1} = |\gamma_{12}(\tau)|$ IF obrazec posunut

3) dva navzájem nekoherentní monochr. bodové zdroje symetricky vůči ose vzdáleny od sebe $a$

$$I_P = I_3\left\{1 + \cos\left(\frac{kah}{2R}\right)\cos\left(\frac{khx_p}{D}\right)\right\}$$

(dráh. rozdíly před otvory; $\omega\tau$ dráh. rozdíly na otvorech)



$$\boxed{u = \frac{kah}{2R}} \qquad \boxed{V = |\cos u|} \leq 1$$

4) úsečka navz. nekoh. monochr. bod. zdrojů délky $a$

$$I_P = I_4\left\{1 + \frac{\sin u}{u}\cos\left(\frac{khx_p}{D}\right)\right\}$$

$$\boxed{V = \left|\frac{\sin u}{u}\right|} \leq 1 \to V \text{ již není periodická fce}$$

(tj. pouze výsledek, bez výpočtu)

5) kruhový nekoherentní zdroj o průměru $a$

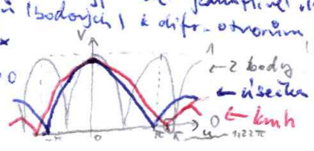
$$\boxed{V = \left|\frac{2J_1(u)}{u}\right|}$$

$J_1$ ... Besselova fce 1. druhu

při výpočtu intenzity světla na matnici v případě časoprostorové koherence, kdy zdroj je obecně plošný, je nutno zahrnout dráhové (a příslušné časové) rozdíly, které jednotlivé vlny získají při šíření od jednotlivých nekoherentních zdrojů (bodových) k difr. otvorům

záření v $X_1, X_2$ koherentní $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ V IF obrazce je v oblasti hl. max fcí $\frac{\sin u}{u}$ nebo $\frac{2J_1(u)}{u}$ ⇒ koherenci zvýšíme zmenšením $u \to 0$

tj. na R velké se záření z téměř každého zdroje jeví jako velmi koherentní (ale intenzita je malá)



# 7 GEOMETRICKÁ OPTIKA

– popisuje šíření světla pomocí paprsků; je to limitní případ vlnové optiky

$\vec{k}\cdot\vec{r} = k\cdot\vec{s}_0\cdot\vec{r} = \frac{\omega}{c}\, n\, \vec{s}_0\cdot\vec{r} = k_0 n\, \vec{s}_0\cdot\vec{r} = k_0 d$ ... $n\,d$ ... opt. dráha; $\psi(\vec{r})$ ... geom. dráha

izotropní (skalární), opticky nehomogenní (závislé na poloze) prostředí $\rightarrow$ $n = n(\vec{r})$, $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$

řešení hledáme pomocí vln s obecnějším prostorovým charakterem:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r})\, e^{ik_0\psi(\vec{r})}\, e^{-i\omega t}}$$

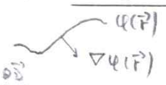
$\vec{E}_0(\vec{r})$ ... amplituda, která se málo mění na vzdálenosti vlnové délky $\lambda$ (nehomogenita prostředí)

$\psi(\vec{r})$ ... **eikonál** $\rightarrow$ skalární fce souřadnic (má rozměr délky); $\psi(\vec{r})$ reálné $\Rightarrow$ nedochází k absorpci / zesílení

pro rovinnou vlnu $\psi(\vec{r}) = n\,\vec{s}_0\cdot\vec{r}$

analog. předp. $\boxed{\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0(\vec{r})\, e^{ik_0\psi(\vec{r})}\, e^{-i\omega t}}$ $\quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

$\nabla\psi(\vec{r}) = \operatorname{grad}\psi(\vec{r})$ ... udává směr šíření vlny



## ROVNICE EIKONÁLU

$$\boxed{\operatorname{grad}\psi = n(\vec{r})\cdot\vec{s}_0}$$

kde $\vec{s}_0$ je jedn. vektor ve směru $\operatorname{grad}\psi$

2. Max. rov. $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, $\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

$\vec{E}, \vec{E}_0, \psi$ fce $\vec{r}$

$\operatorname{rot}\vec{E} = e^{i(k_0\psi - \omega t)}\operatorname{rot}\vec{E}_0 + \operatorname{grad}(e^{i(k_0\psi-\omega t)})\times\vec{E}_0 = -\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\mu_0(-i\omega)\vec{H}_0 e^{i(k_0\psi-\omega t)}$

vzorec: $\operatorname{rot} a\vec{A} = a\operatorname{rot}\vec{A} + \operatorname{grad} a\times\vec{A}$; $\quad \vec{A} = \vec{E}_0(\vec{r})$, $a = e^{i(k_0\psi(\vec{r})-\omega t)}$

$\operatorname{rot}\vec{E}_0 + ik_0\operatorname{grad}\psi\times\vec{E}_0 - i\omega\mu_0\vec{H}_0 = 0 \quad \Big/ \cdot\frac{1}{k_0}$

$\frac{1}{k_0}\operatorname{rot}\vec{E}_0(\vec{r}) + i\operatorname{grad}\psi(\vec{r})\times\vec{E}_0(\vec{r}) - i\frac{\omega}{k_0}\mu_0\vec{H}_0(\vec{r}) = 0$

$\frac{\lambda}{2\pi}$ změny $\vec{E}_0$ v prostoru $\rightarrow$ pokud je zanedbatelný $\vec{E}_0(\vec{r})$ mění se málo $\sim 0$ = limit (přiblížení) geom. optiky

po přiblížení GO: $\vec{H}_0(\vec{r}) = \frac{k_0}{\mu_0\omega}\operatorname{grad}\psi(\vec{r})\times\vec{E}_0(\vec{r})$

analogicky z $\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ $\Rightarrow$ $\vec{E}_0(\vec{r}) = -\frac{k_0}{\varepsilon_0\omega n^2}\operatorname{grad}\psi(\vec{r})\times\vec{H}_0 = -\frac{k_0^2}{\varepsilon_0\mu_0 n^2\omega^2}\operatorname{grad}\psi\times(\operatorname{grad}\psi\times\vec{E}_0(\vec{r}))$ $\quad \Big| -\frac{\omega^2 c^2}{c^2 n^2\omega^2} = -\frac{1}{n^2}$

$\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$\vec{E}_0(\vec{r}) = -\frac{1}{n^2}\{\operatorname{grad}\psi\,(\operatorname{grad}\psi\cdot\vec{E}_0(\vec{r})) - \vec{E}_0(\vec{r})(\operatorname{grad}\psi\cdot\operatorname{grad}\psi)\}$

$\operatorname{grad}\psi\cdot(\sim\operatorname{grad}\psi\times\vec{H}_0) = 0$ ($\perp$ ke grad $\psi$)

$\Rightarrow \vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{1}{n^2}(\operatorname{grad}\psi)^2\vec{E}_0(\vec{r}) \Rightarrow (\operatorname{grad}\psi(\vec{r}))^2 = n^2(\vec{r})$

fyz. význam eikonálu

$\rightarrow$ jeho $\nabla$ udává rozložení $n$

$\operatorname{grad}\psi$ udává směr šíření energie vlny

$\vec{S} \sim \operatorname{grad}\psi$ $\rightarrow$ mají stejný směr

$\vec{H}_0(\vec{r}) \sim \operatorname{grad}\psi\times\vec{E}_0(\vec{r})$

$\vec{E}_0(\vec{r}) \sim \operatorname{grad}\psi\times\vec{H}_0(\vec{r})$

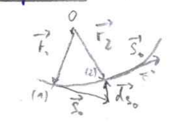
$\vec{S} \sim \vec{E}_0\times\vec{H}_0 \sim (\operatorname{grad}\psi\times\vec{H}_0)\times(\operatorname{grad}\psi\times\vec{E}_0) = \operatorname{grad}\psi\,(\underbrace{(\operatorname{grad}\psi\times\vec{H}_0)\cdot\vec{E}_0}_{\text{skalár}}) - \vec{E}_0(\cancel{(\operatorname{grad}\psi\times\vec{H}_0)\cdot\operatorname{grad}\psi})$ ($\perp$ grad $\psi$ $\Rightarrow 0$)

$\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$\Rightarrow \vec{S} \sim \operatorname{grad}\psi$

$\psi$ = konst. ... vlnoplocha v GO

paprsek = křivka k níž je $\vec{s}_0(\vec{r})$ tečná

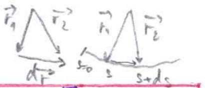


$s$ ... parametr křivky

$r(1)$ hodnota $s$

$r(2)$ hodnota $s+ds$

$\vec{s}_0(s+ds) = \vec{s}_0(s) + d\vec{s}_0$



$$\boxed{\vec{s}_0 = \frac{d\vec{r}}{|k\vec{r}|} = \frac{d\vec{r}}{ds}\Big|_{\vec{r}}}$$

definice tečného vektoru křivky s parametrem $s$

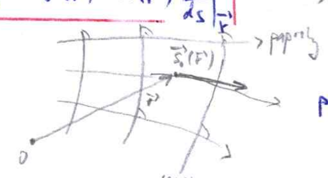
Eikonálová rovnice:

$$\boxed{\operatorname{grad}\psi(\vec{r}) = n(\vec{r})\frac{d\vec{r}}{ds}\Big|_{\vec{r}}}$$

$\frac{d}{ds}$

## PAPRSKOVÁ ROVNICE

$$\boxed{\frac{d}{ds}\left(n(\vec{r})\frac{d\vec{r}}{ds}\Big|_{\vec{r}}\right) = \operatorname{grad} n(\vec{r})}$$



$\psi(\vec{r})$ = konst.

{geometrické "vlnoplochy" – nepotkávají se}

pro homog. prostředí ($n$ = konst.) $\rightarrow$ $\operatorname{grad} n(\vec{r}) = 0$

$n\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = 0 \Rightarrow \vec{r} = \vec{a} + \vec{b}s$ ... rovnice přímky

## Lagrangeův invariant

$$\boxed{\oint_l n(\vec{r})\,\vec{s}_0(\vec{r})\cdot d\vec{l} = 0}$$

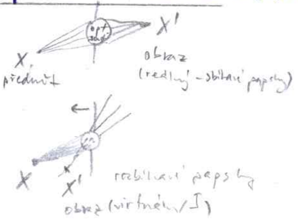
$\operatorname{grad}\psi(\vec{r}) = n(\vec{r})\,\vec{s}_0(\vec{r})$

$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\psi(\vec{r}) = \operatorname{rot} n(\vec{r})\,\vec{s}_0(\vec{r})$

$\oint_{\partial A}\vec{a}\cdot d\vec{l} \overset{\text{Stokesova věta}}{=} \iint_A \operatorname{rot} n(\vec{r})\,\vec{s}_0(\vec{r}) = 0$

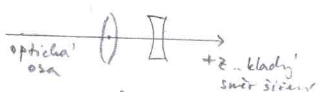
$\rightarrow$ cílem je vytvořit obraz předmětu na jiném místě ve stejné nebo změněné velikosti

**optická soustava** = soubor rozhraní (odrazových a lámavých ploch), pomocí kterých se uskutečňuje optické zobrazování





předmětový prostor | obrazový prostor





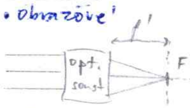
**centrovaná soustava**

$\rightarrow$ středy křivosti lámavých ploch leží na jedné přímce (tj. optická osa)

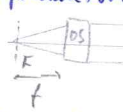
**kardinální body opt. soustavy:**

**ohniska**

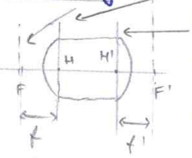
- obrazové



- předmětové



**hlavní body**



ohniskové roviny (obraz. a předmět.) – leží li předmět v hlavní předmětové rovině $\Rightarrow$ jeho obraz leží v hlavní obrazové rovině, stejné velikosti a orientace

hlavní předmětová rovina

hlavní obrazová rovina

$f$ ... předmětová ohnisková vzdálenost

$f'$ ... obrazová ohnisková vzdálenost

$H$ ... hlavní předmětový bod

$H'$ ... hlavní obrazový bod

$f = |FH|$

$f' = |F'H'|$

pro případ tenké čočky $H = H'$

## MATICOVÝ POPIS

– vliv jednotlivých prvků na šíření paprsku je popsán **přenosovými maticemi**

**paraxiální aproximace** – omezíme se na paprsky téměř paralelní s opt. osou (úhel $\theta$ pod kterým paprsky dopadají na opt. prvky je malý) $\Rightarrow$ linearizace fcí $\sin\vartheta \cong \operatorname{tg}\vartheta \cong \vartheta$

vůči normále k ploše $\theta > 0$

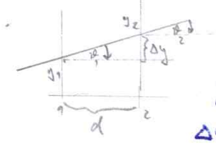
**znaménková konvence**: vzdálenost (+) ve směru kladných os $z, y$; (–) naopak

R > 0 R < 0

úhly (+) od vztažného ramene proti směru hod. ručiček

vztažné rameno: odraz a lom $\rightarrow$ kolmice dopadu (normála); pro paprsky $\rightarrow$ paprsek

**přenosová matice šíření**



$\theta_1 = \theta_2$

$\theta_1, \theta_2 < 0$ (zn. konvence)

$y_2 = y_1 + \Delta y \cong y_1 - d\theta_1$

$\Delta y = -d\operatorname{tg}\theta_1 \cong -d\theta_1$ (protože $\theta_1 < 0$, $>0$)

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T\text{ ... přenosová matice šíření}}\begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}}$$

**lom na kulovém rozhraní**

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(1-\frac{n_i}{n_t}\right)\frac{1}{R} & \frac{n_i}{n_t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}}$$

$\theta_i, \theta_t > 0$; $\theta_1, \theta_2 < 0$; $\phi > 0$

se zachováním znaménkové konvence

$\phi = \theta_i + \theta_1$

$\phi = \theta_t + \theta_2$

$\theta_2 = \phi - \theta_t = \phi - \frac{n_i}{n_t}\theta_i$

Snell: $n_i\theta_i \approx n_t\theta_t$

$= \phi - \frac{n_i}{n_t}(\phi - \theta_1) = \left(1 - \frac{n_i}{n_t}\right)\frac{y_1}{R} + \frac{n_i}{n_t}\theta_1$

$\phi \cong \frac{y}{R}$; $y_1 = y_2$

ABCD matice (přenosová matice lomu) pro zakřivený povrch (lom)

**obecné vlastnosti přenosových matic**

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}}$$

1) $D = 0 \Rightarrow \theta_2 = C y_1$

2) $B = 0 \Rightarrow y_2 = A y_1$

3) $A = 0 \Rightarrow y_2 = B\theta_1$

4) $C = 0 \Rightarrow \theta_2 = D\theta_1$

**příčné zvětšení**

$A = \frac{y_2}{y_1}$ $\quad \boxed{M_T = \frac{y_2}{y_1}}$

**úhlové zvětšení**

$D = \frac{\theta_2}{\theta_1}$ $\quad \boxed{M_\theta = \frac{\theta_2}{\theta_1}}$

**obrazová ohnisková vzdálenost $f'$**

dosadíme $\theta_1 = 0$

$\theta_2 = \left(1 - \frac{n_i}{n_t}\right)\frac{y_1}{R} + \cancel{\frac{n_i}{n_t}\theta_1}$

$\theta_2 \approx \frac{y_1}{f'}$

$\frac{y_1}{f'} = \left(1 - \frac{n_i}{n_t}\right)\frac{y_1}{R}$

$$\boxed{\frac{1}{f'} = \left(1 - \frac{n_i}{n_t}\right)\frac{1}{R}}$$

**přenosová matice pro čočky**

lom na $n_2, n_3$; lom na $n_1, n_2$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_2'} & \frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_1'} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_2'} + \frac{n_2}{n_3}\frac{1}{f_1'} & \frac{n_1}{n_3} \end{pmatrix}$$

dosadíme za $\frac{1}{f_2'} = \left(1 - \frac{n_2}{n_3}\right)\frac{1}{R_2}$, $\frac{1}{f_1'} = \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)\frac{1}{R_1}$

**předmětová ohnisková vzdálenost $f$**

bereme $\theta_2 = 0$

$0 = \left(1 - \frac{n_i}{n_t}\right)\frac{y_1}{R} + \frac{n_i}{n_t}\theta_1$

$\theta_1 \approx \frac{y_1}{f}$

$\frac{1}{f'}\frac{y_1}{R} + \frac{n_i}{n_t}\frac{y_1}{f} = 0$

$$\boxed{\frac{1}{f} = -\frac{n_t}{n_i}\frac{1}{f'}}$$

## ČOČKOVÁ ROVNICE

$$\boxed{C = \frac{1}{f'} = \frac{1}{R_2}\left(1 - \frac{n_2}{n_3}\right) + \frac{n_2}{n_3}\frac{1}{R_1}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)}$$

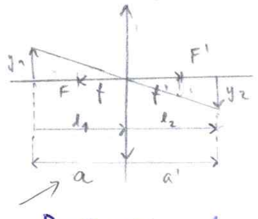
spec. $n_1 = n_3 \Rightarrow$ také $f = -f'$

$$\boxed{\frac{1}{f'} = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)(n_2 - 1)}$$

# GAUSSOVA ZOBRAZOVACÍ ROVNICE

$$\boxed{\frac{1}{f'} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}}$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}$$




z obecných vl. přenosové matice zobrazení $y_1 \to y_2$ (z předmětu $y_1$ paprsky pod všemi úhly $\theta_1$ a do obrazu $y_2$ dopadají pod všemi úhly $\theta_2$ $\Rightarrow B = 0$

letadlo paprsek 3 události:

$$T = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{šíření na vzdálenost } l_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f'} & 1 \end{pmatrix}}_{\text{lom na čočce s } f = -f'} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{šíření k čočce na vzdálenost } l_1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_2}{f'} & \underbrace{-l_1 + \frac{l_1 l_2}{f'} - l_2}_{B} \\ \frac{1}{f'} & -\frac{l_1}{f'} + 1 \end{pmatrix}$$

$$B = 0 \Rightarrow -l_1 + \frac{l_1 l_2}{f'} - l_2 = 0 \Rightarrow l_1 + l_2 = \frac{l_1 l_2}{f'}$$

$$l_1 = -a \qquad l_2 = a'$$

Franc má zde $-a$ pak to ale není že $l_1 = -a$ ?

# 8 ABSORPCE (interakce světla s látkou)

světlo → energie látce ⇒ vlna se tlumí

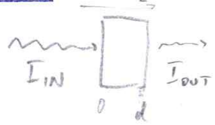
(nekvantový popis) předpokládáme, kolmý dopad na látku

předp. látka je izotropní a její odezva na EM pole je lineární (platí princip superpozice)

## LAMBERT-BEERŮV ZÁK.

→ stanoven experimentálně; závislost dobře platí u vzorků tvaru desky s malou odrazivostí a vhodnou tloušťkou $d$ vzhledem k $\alpha$

$$\boxed{I_{OUT} = I_{IN}\, e^{-\alpha d}}$$



$I_{IN}$ … vstupní intenzita

$I_{OUT}$ … výstupní intenzita

$d$ … tloušťka desky

$\alpha(\omega)$ … absorpční koeficient

$I \sim E_0^2 \Rightarrow$ musí klesat amplituda

EM vlna (lin. pol. ve sm. $x$, šíření ve sm. $z$):

$$E_x(z,t) = E_{0x}\, e^{-k_I z} \cos(k_R z - \omega t)$$

$$\tilde{E}_x(z,t) = E_{0x}\, e^{i\tilde{K}_z z}\, e^{-i\omega t}$$

$$= E_{0x}\, e^{i(k_R + i k_I) z}\, e^{-i\omega t} = E_{0x} e^{-k_I z} e^{i k_R z} e^{-i\omega t}$$

$(\mathrm{Re}\{\tilde{E}_x(z,t)\} = E_{0x} e^{-k_I z} \cos(k_R z - \omega t))$ ↘ dosadíme do Max. rovnic

$k_R = \frac{\omega}{c} n \quad (k_R = k)$ $\quad k_I$ … koeficient popisující tlumení vlny při průchodu látkou

$$\tilde{K}_z = (\vec{k}_R)_z + i(\vec{k}_I)_z$$

$$\boxed{\tilde{K}_z = \frac{\omega}{c}(n + i\varkappa) = \frac{\omega}{c}\tilde{N}}$$

komplexní vlnový vektor:

$$\boxed{\tilde{\vec{K}} = \vec{k}_R + i\vec{k}_I}$$

komplexní index lomu:

$$\boxed{\tilde{N}(\omega) = n(\omega) + i\varkappa(\omega)} \qquad \boxed{\tilde{N} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_r(\omega)}}$$

látka charakterizována obecně komplexnými veličinami:

$$\tilde{D}_x = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_r \tilde{E}_x = \varepsilon_0 \tilde{N}^2 \tilde{E}_x$$

$$\tilde{H}_y = \varepsilon_0 c \sqrt{\tilde{\varepsilon}_r}\, \tilde{E}_x = \varepsilon_0 c \tilde{N} \tilde{E}_x$$

$$\tilde{P}_x = \varepsilon_0 \tilde{\chi} \tilde{E}_x = \varepsilon_0 |\tilde{\chi}| e^{i\varphi_\chi}$$

$$\tilde{\varepsilon}_r = (n + i\varkappa)^2 = \underbrace{n^2 - \varkappa^2}_{\varepsilon_R} + i\underbrace{2n\varkappa}_{\varepsilon_I}$$

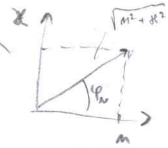
$$\tilde{\chi}(\omega) = \chi_R(\omega) + i\chi_I(\omega)$$

$$\tilde{\varepsilon}_r(\omega) = \varepsilon_R(\omega) + i\varepsilon_I(\omega)$$

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \sigma_R(\omega) + i\sigma_I(\omega) = 0 \leftarrow \text{dielektrikum}$$

a předpokládáme nemagnetické prostředí $\mu = \mu_0$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_R = \chi_R + 1 \\ \varepsilon_I = \chi_I \end{pmatrix}$$



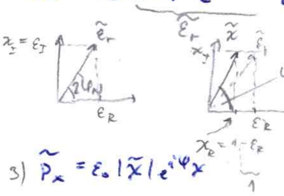
$$\tilde{N} = |\tilde{N}| e^{i\varphi_N} \qquad |\tilde{N}| = \sqrt{n^2 + \varkappa^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_N = \frac{\varkappa}{n}$$

pokud $\varkappa = \frac{\omega}{c} k_I = 0$
$\Rightarrow \varphi_N = 0 \Rightarrow \vec{H}, \vec{E}$ kmitají ve fázi (neabsorbující prostředí)

1) $\tilde{H}_y = \varepsilon_0 c |\tilde{N}| e^{i\varphi_N} \tilde{E}_x \Rightarrow$ magnetické pole nekmitá ve fázi s el. polem (v absorbujícím prostředí)
obě pole jsou fázově posunuta o úhel $\varphi_N$ → dán vzájemným poměrem reálné a imag. části indexu lomu

2) $\tilde{D}_x = \varepsilon_0 \underbrace{|\tilde{N}|^2 e^{i2\varphi_N}}_{\tilde{\varepsilon}_r} \tilde{E}_x \Rightarrow$ el. indukce (reprezentující odezvu látky na budící pole $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$) je fáz. posunuta vůči $\vec{E}$ o $2\varphi_N$



$$\tilde{\varepsilon}_r = \varepsilon_R + i\varepsilon_I = 1 + \chi_R + i\chi_I$$

$$\Rightarrow \varphi_\chi > 2\varphi_N$$

$$\boxed{\begin{aligned} n &= \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_R + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_I^2}\right)} \\ \varkappa &= \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-\varepsilon_R + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_I^2}\right)} \end{aligned}}$$

$\varepsilon_R = n^2 - \varkappa^2$
$\varepsilon_I = 2n\varkappa$

neabsorbující prostředí
$k_I = 0 \Rightarrow \varkappa = 0 \Rightarrow \alpha = 0$
$\Rightarrow \varphi_N, 2\varphi_N, \varphi_\chi = 0$
(kmitá $\vec{H}, \vec{D}, \vec{P}, \vec{E}$ ve fázi)

3) $\tilde{P}_x = \varepsilon_0 |\tilde{\chi}| e^{i\varphi_\chi}$ ⇒ veličiny $\vec{H}, \vec{D}, \vec{P}$ jsou v absorbujícím prostředí fáz. posunuty vůči $\vec{E}$, každá o jiný úhel závislý na im. č. i. lomu $\varkappa$
$k_I \neq 0 \Rightarrow \varkappa \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0 \Rightarrow \varphi_N, 2\varphi_N, \varphi_\chi \neq 0$

$$I = \langle w_e \rangle_T = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\vec{E}\} \cdot \mathrm{Re}\{\vec{D}\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\langle \tilde{\vec{E}} + \tilde{\vec{E}}^* \rangle_T \cdot \frac{1}{2}\langle \tilde{\vec{D}} + \tilde{\vec{D}}^* \rangle_T = \frac{1}{8}\Big(\underbrace{\langle \tilde{\vec{E}} \cdot \tilde{\vec{D}} \rangle_T}_{0} + \langle \tilde{\vec{E}} \cdot \tilde{\vec{D}}^* \rangle_T + \langle \tilde{\vec{E}}^* \rangle_T \cdot \langle \tilde{\vec{D}} \rangle_T + \underbrace{\langle \tilde{\vec{E}}^* \cdot \tilde{\vec{D}}^* \rangle_T}_{0}\Big)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\langle \tilde{\vec{E}} \tilde{\vec{D}}^* \rangle_T + \langle \tilde{\vec{E}}^* \tilde{\vec{D}} \rangle_T\right)$$

sk. souč. $\tilde{\vec{E}}, \tilde{\vec{D}} \sim e^{-i\omega t}$

$$\tilde{\vec{E}} \cdot \tilde{\vec{D}},\ \tilde{\vec{E}}^* \cdot \tilde{\vec{D}}^* \sim e^{-2i\omega t}$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{E} &= E_{0x} e^{-\frac{\omega}{c}\varkappa z} e^{i\frac{\omega}{c}nz} e^{-i\omega t} \\ \tilde{D} &= \varepsilon_0 (n + i\varkappa)^2 e^{-\frac{\omega}{c}\varkappa z} e^{i\frac{\omega}{c}nz} e^{-i\omega t} \end{aligned}\right\} \tilde{E}^*\tilde{D},\ \tilde{E}\tilde{D}^* \sim e^{-\frac{2\omega}{c}\varkappa z}$$

$$\langle e^{-i\omega t} \rangle_T = 0 \qquad \langle e^{-2i\omega t} \rangle_T = 0$$

časové průměrování vede k nulu

$$\boxed{I_{OUT} = \langle w_e \rangle_T \sim e^{-\frac{2\omega}{c}\varkappa z}}$$

v souladu s experimentem zavedeme $(I \sim e^{-\alpha z})$

absorpční koeficient

$$\boxed{\alpha = \frac{2\omega}{c}\varkappa}$$

## LORENTZŮV MODEL

odezvy dielektrika → představa látky jako soubor oscilujících dipólů

el. dipóly vznikají posunem kladných a záporných nábojů z rovnovážných poloh vlivem vnějšího el. pole

↱ posun el. obalu vůči jádru
posun ⊕ a ⊖ iontů v iontových krystalech

předpokládáme rovnoměrné rozložení dipólů
⇒ $N$ … koncentrace dipólů

objemová hustota dipólového momentu: $\boxed{\vec{P} = Nq\vec{r}}$ $\quad q$ … efektivní náboj tvořící dipól

$\vec{r} = (x(t), 0, 0)$ $\quad x(t)$ … výchylka z rovnovážné polohy

pohybová rovnice (zák. síly) (asi x-ová složka)

výchylku $\tilde{x}$ uvažujeme jako komplexní (může dojít k fáz. posunu vůči budícímu poli $\vec{E}$)

$$F = ma = m\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} = q\vec{E}(t) - m\gamma\dot{\tilde{x}} - k_H \tilde{x}$$

$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ … budící el. pole

$$\boxed{m\ddot{\tilde{x}} + m\gamma\dot{\tilde{x}} + k_H\tilde{x} = qE_0 e^{-i\omega t}}$$

ODR 2. řádu s nenulovou pr. stranou
lze ukázat, že homog. řeš. ("0") vede k kmitům, které se po dlouhé době $t \to \infty$ utlumí
Budeme tedy uvažovat pouze nenulovou pravou stranu (tj. partikulární řešení) které je stacionární

$k_H\tilde{x}$ … vazební elastická síla; $k_H$ … Hookova konstanta
vnitřní elektron k jádru

$$\ddot{\tilde{x}} + \gamma\dot{\tilde{x}} + \underbrace{\frac{k_H}{m}}_{\omega_0^2}\tilde{x} = \frac{q}{m}E_0 e^{-i\omega t}$$

$m\gamma\dot{\tilde{x}}$ … tlumící síla; $\gamma$ … konstanta tlumení $[\gamma] = s^{-1}$

řeš. hledáme ve tvaru $\tilde{x} = \tilde{x}_0 e^{-i\omega t}$
dosadíme

$$[(-i\omega)^2\tilde{x}_0 - i\omega\gamma\tilde{x}_0 + \omega_0^2\tilde{x}_0]e^{-i\omega t} = \frac{q}{m}E_0 e^{-i\omega t}$$

$$\tilde{x}_0 = \frac{qE_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

příspěvek k objemové hustotě dip. momentu: $\Delta\tilde{P} = Nq\tilde{x}$

$$\Delta P(t) = \frac{Nq^2 E_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

porovnáním s $\vec{P} = \varepsilon_0\tilde{\chi}\vec{E} = \varepsilon_0\tilde{\chi}E_0 e^{-i\omega t}$

$$\Rightarrow \tilde{\chi} = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

$A = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}$

proč zde není člen $e^{i\omega t}$?

$$= \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

$$\boxed{A = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}}$$

pokud tlumení nelze zanedbat ($\gamma \neq 0$) $\tilde{P}(\omega), \tilde{\chi}(\omega), \tilde{\varepsilon}_r(\omega)$ jsou komplexní

$$\boxed{\tilde{\chi} = A\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} + A\frac{i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} = \chi_R + i\chi_I$$

$$\boxed{\tilde{\varepsilon}_r = 1 + \underbrace{A\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}_{\varepsilon_R} + \underbrace{A\frac{i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}_{\varepsilon_I}} = 1 + \tilde{\chi} = 1 + \chi_R + \chi_I$$

celkově: z pohybové rovnice dostaneme $\tilde{X}=f(\omega) \Rightarrow \tilde{P}(\omega) \Rightarrow \tilde{\chi}(\omega) \Rightarrow \tilde{\varepsilon}_r(\omega) \Rightarrow n,\kappa = f(\omega)$

v reálné látce vždy osciluje několik typů oscilátorů. V případě slabého buzení → odezva lineární (platí princip superpozice)

aditivním parametrem modelu je susceptibilita $\tilde\chi(\omega)=\sum_l \tilde\chi_l(\omega)=\sum_l \chi_{Rl}(\omega)+\sum_l\chi_{Il}(\omega)$

index lomu $\tilde N$ není aditivní veličinou!

$\frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m} \to \frac{N_l q_l^2}{\varepsilon_0 m_l} = A_l \Rightarrow$ neodpovídají dobře experimentu

$$\tilde\varepsilon_r(\omega) = 1+\tilde\chi(\omega) = \underbrace{1+\sum_l \chi_{Rl}(\omega)}_{\varepsilon_R(\omega)} + \underbrace{\sum_l\chi_{Il}(\omega)}_{\varepsilon_I(\omega)}$$

$$\boxed{A_l = \frac{N_l q_l^2}{\varepsilon_0 m_l} f_l}$$

kvantový model (jiné předpoklady) téměř stejné rovnice jako Lorentzův model přenásobené $f_l$ ... síla oscilátoru

$$\to \varepsilon_R(\omega)=n^2-\kappa^2 = 1+\sum_l \overbrace{\frac{N_l q_l^2}{\varepsilon_0 m_l} f_l}^{A_l} \frac{\omega_{0l}^2-\omega^2}{(\omega_{0l}^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}$$

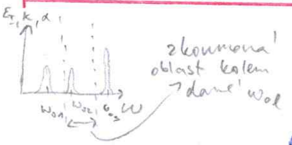
$$\varepsilon_I(\omega) = 2n\kappa = \sum_l A_l \frac{\gamma\omega}{(\omega_{0l}^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}$$

→ jednotlivé typy oscilátorů mají vzn. vliv zejména v okolí rezonanční frekvence $\omega_{0l}$ → zajímá-li nás pouze určitá frekvenční oblast okolo $\omega_{0l}$ → můžeme zjednodušit, zahrnout vliv ostatních oscilátorů jako konst. příspěvek k $\varepsilon_R, \chi_R$

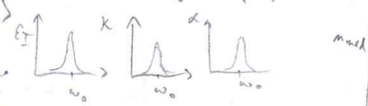
$$\varepsilon_R(\omega) = \underbrace{1+\sum_{l'\neq l} A_{l'} \frac{\omega_{0l'}^2-\omega^2}{(\omega_{0l'}^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}_{\varepsilon_{R,MED}=n^2_{MED}} + A_l \frac{\omega_{0l}^2-\omega^2}{(\omega_{0l}^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}$$

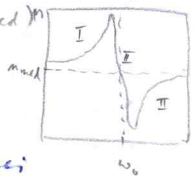
$$\boxed{\varepsilon_R = n^2_{med} + A\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}$$

(pro dané $l$ → teď zkoumáme tedy v okolí $\omega_{0l}$) → index $l$ vynechán




vliv jako jeden oscilátor (ostatní zahrnuty konst. přísp. $n^2_{med}$)




I $\omega \ll \omega_0$
III $\omega \gg \omega_0$ } oblast normální disperze ($n$ s $\omega$ roste)

II $\omega \approx \omega_0$ – oblast anomální disperze ($n$ s $\omega$ klesá)

↳ šířka oblasti II roste s rostoucím tlumením – dochází zde k silné absorpci záření → $\alpha, \kappa$ velké

$\varepsilon_I$ má max. v $\omega_0$, kdy dochází k max. absorpci ⇒ předání energie látce, zpravidla formou tepelné energie

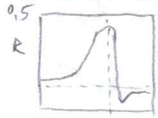
výkonová odrazivost absorbujících látek (uvažujeme kolmý dopad) → dosazení komplex indexu lomu do

$$\tilde r_{s,p}(\omega) = \boxed{\tilde r(\omega) = \frac{1-\tilde N(\omega)}{1+\tilde N(\omega)}} = \frac{1-n_2(\omega)-i\kappa_2(\omega)}{1+n_2(\omega)+i\kappa_2(\omega)}$$

vzduch $n_1=1$

neabsorbující dielektrikum → s výjimkou tot. odrazu $\tilde N = n+i\kappa$ to jsou reálná čísla

a výkonový koeficient $\boxed{R(\omega)=\tilde r(\omega)\tilde r^*(\omega)}$




spektrální průběh reálné části indexu lomu $n$ je možné v některých případech aproximovat zjednodušenými analytickými výrazy

**SELLMEIERŮV VZOREC** $n^2 = 1 + A\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda_0^2}$ → pro téměř neabsorbující dielektrika v blízké IR a VIS oblasti v oblasti normální disperze I a zanedbáme absorpci ($\gamma\approx 0$)

$\lambda_0$ ... rezonanční vlnová délka

pro $\omega\ll\omega_0$ CAUCHYHO VZOREC $n^2 = A' + \frac{B'}{\lambda^2}+\frac{C'}{\lambda^4}+\dots$

## DRUDEHO MODEL odezva vodivého prostředí

volně pohyblivé náboje → ionty v plynném plazmatu / elektrony v kovech ⇒ nejsou vázány k rovnovážným polohám

dosazením $k_H=0, \omega_0=0$ do LORENTZOVA MODELU ⇒ DRUDEHO MODEL

$$\boxed{\varepsilon_r(\omega) = 1+\frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{-i\gamma\omega-\omega^2} = 1-\frac{\omega_p^2}{i\gamma\omega+\omega^2}}$$

plazmová frekvence → charakteristická frekvence prostředí, kde uvažujeme pouze volně pohyblivé náboje

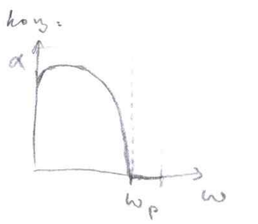
$$\boxed{\omega_p=\sqrt{\frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}}}$$

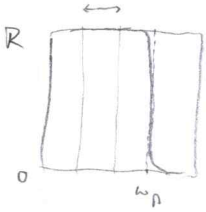
v kovech → $\omega_p \in$ UV

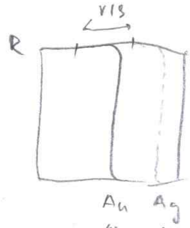
v polovodičích → $\omega_p \in$ IR

$\varepsilon_R = n^2-\kappa^2 = 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2+\gamma^2}$

$\varepsilon_I = 2n\kappa = \frac{\gamma\omega_p^2}{\omega^3+\gamma^2\omega}$ ⇒ odsud $n(\omega)$, $\kappa(\omega)$





většina kovů, např. Ag – stříbro ⇓ odráží viditelné světlo jeví se „bílé"

z důvodu dalších mechanismů je plazmová frekvence zlata posunuta

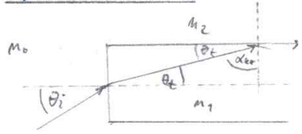
Zlato: $\Delta\omega_p(Ag, Au)$

$\omega_p(Au) \sim \lambda_p = 540$ nm ⇒ odráží se jen některé $\omega$ jeví se žlutě

nad plazmovou frekvencí vodivé prostředí EM záření propouští

# 9 ZÁKLADY VLÁKNOVÉ OPTIKY → aplikace: optické obvody (mají menší ztráty než el. obvody)

optické vlákno → vede světelný signál tím, že dochází k úplnému odrazu na rozhraní vlákna a okolí




$n_1 > n_0$ $n_1$ … index lomu vlákna

$\theta_i$ … úhel dopadu na počátek vlákna

$\theta_t$ … úhel lomu

$\alpha$ … úhel dopadu na stěnu vlákna

vlnovod musí splňovat $\alpha > \alpha_{kr} \wedge \theta_i < \theta_{max}$ (akceptační úhel)

$n_1 \sin\alpha_{kr} = n_2 \sin\frac{\pi}{2}$ → aby na stěně došlo k úplnému odrazu

$$\boxed{\sin\alpha_{kr} = \frac{n_2}{n_1}}$$

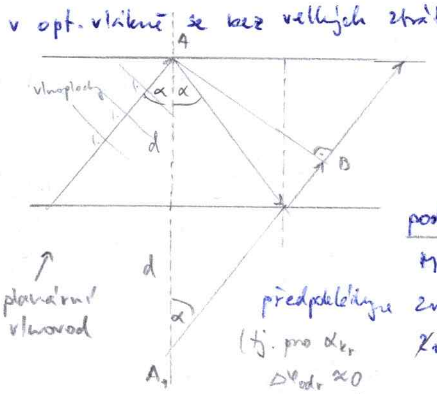
$$\theta_t + \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$n_0 \sin\theta_i = n_1 \sin\theta_t = n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = n_1 \cos\alpha$

$\theta_{max}$: $n_0 \sin^2\theta = n_1 \cos\alpha_{kr}$

$\to /^2$ $n_0^2 \sin^2\theta_{max} = n_1^2 \cos^2\alpha_{kr} = n_1^2(1 - \sin^2\alpha_{kr}) = n_1^2\left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}\right) = n_1^2 - n_2^2$ ⇒ $\boxed{n_0 \sin\theta_{max} = NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$ NA … numerická apertura vlákna

v opt. vlákně se bez velkých ztrát mohou šířit jen určité světelné módy
ne přímo ale s odrazem tj. A → B




$\overline{AB} = \overline{A_1B} = 2d\cos\alpha$ … dráhový rozdíl

fázový náběh šířením: $2kd\cos\alpha = 2n_1k_0d\cos\alpha$

celková změna fáze: $2n_1k_0d\cos\alpha + \Delta\varphi_{odr}$ ← vlna ve vlnovodu získává náběh fáze šířením a dále dodatečnou změnu $\Delta\varphi_{odr}$ v důsledku odrazu na opt. hustším pr. pod úhlem $> \alpha_{kr}$ ⇒ ($\Delta\varphi_{odr}$ … složitou fci)

podmínka sfázování (TF podmínka) $2n_1k_0d\cos\alpha + \Delta\varphi_{odr} = 2m\pi$ $m = 0, 1, \dots, M$ ($m, M \in \mathbb{Z}$)

M … max. číslo módu, které může ve vlákně existovat

předpokládejme (tj. pro $\alpha_{kr}$ $\Delta\varphi_{odr} \approx 0$ ???) $2n_1k_0d\cos\alpha \approx 2M\pi$

$\cancel{2}n_1\frac{2\pi}{\lambda_0}d\cos\alpha \approx \cancel{2}M\cancel{\pi}$

$$M \approx \frac{2n_1d\cos\alpha_{kr}}{\lambda_0}$$

$n_0 \sin\theta_{max} = n_1\cos\alpha_{kr}$

$M \approx \frac{2\cancel{n_1}d}{\lambda_0}\frac{n_0}{\cancel{n_1}}\sin\theta_{max}$ NA

$$\boxed{M \approx \frac{2d\,NA}{\lambda_0}}$$ celá část

celkový počet módů, které ve vlnovodu mohou existovat roste s poměrem $\sim \frac{d}{\lambda_0}$
tj. i nultý mód
(celkový počet módů je M+1)
M … maximální mód

**útlum** – parametr vlákna charakterizující ztráty v důsledku rozptylu a absorpce

$$\boxed{\text{útlum} = 10\log_{10}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)}$$

útlum se obvykle vztahuje na délku vlákna 1 km

$P_1$ … světelný výkon na vstupu do vlákna

$P_2$ … světelný výkon na výstupu z vlákna

# 10 NELINEÁRNÍ OPTIKA

(Lineární optika: veličiny charakterizující látku jsou nezávislé na intenzitě světla $\vec{P} \sim \vec{E}$, Maxwellovy rovnice jsou lineární a platí princip superpozice $\vec{P} = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\chi} \vec{E}$)

lineární optika je aproximace, která platí jen pro malé intenzity světla

obecně vektor polarizace $\vec{P}$ složitou fcí $\vec{E}$ → uvažujeme zjednodušený popis, kdy $\vec{E}$ a $\vec{P}$ jsou lin. polarizované ve stejném směru

$$\boxed{P_i = \varepsilon_0 \Big( \underbrace{\sum_j \chi_{ij} E_j}_{P_L \text{ ... lin. část}} + \underbrace{\sum_{jk} \chi^{(2)}_{ijk} E_j E_k + \sum_{j,k,l} \chi^{(3)}_{ijkl} E_j E_k E_l + \dots}_{P_{NL} \text{ ... nelin. část}} \Big)}$$

$\chi^{(2)}$ → 2. řádu, $\chi^{(3)}$ → 3. řádu

$i, j, k, l, \dots = x, y, z$ 

$\chi_{xyz}$ ... např. susceptibilita (2. řádu) ve směru $x$, jestliže el. pole působí ve směrech $y$ a $z$

$E_j, E_k$ ... obě komponenty mohou patřit téže vlně ($\sim e^{-i\omega t}$), ale i různým vlnám (různá čas. závislost)

→ případ, kdy frekvence světla není v rezonanci s energ. přechody v látkách (tj. nedochází k excitaci do vyšší e. stavů) ⇒ látka má okamžitou odezvu

## NELIN. OPT. JEVY 2. ŘÁDU

(v krystalech se středem symetrie ⇒ $\overleftrightarrow{\chi}_{ijk} = \overleftrightarrow{0}$ ⇒ nelin. opt. jevy 2. řádu nenastávají)

$$P^{(2)}_i = \varepsilon_0 \sum_{jk} \chi^{(2)}_{ijk} E_j E_k$$

$\overleftrightarrow{\chi}^{(2)}$ ... susceptibilita 2. řádu

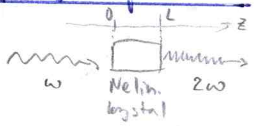
↳ $\chi_{ijk}$ ... (tenzor 3. řádu) → 27 komponent (matematicky)

látky se středem symetrie musí mít neměnné vlastnosti při inverzi os $x \to -x$, $y \to -y$, $z \to -z$: $-P^{(2)}_i = \varepsilon_0 \sum_{jk} \chi^{(2)}_{ijk} (-E_j)(-E_k)$

$-P^{(2)}_i = P^{(2)}_i = 0 \Rightarrow \chi^{(2)}_{ijk} = 0$

[(generace 2. harmonické frekvence)

↳ **zdvojení frekvence**




– vstupní vlna vyvolá v materiálu polarizaci oscilující na dvojnásobné frekvenci, ta je zdrojem vlny s frekvencí $2\omega$

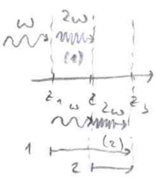
buzení pole: $E(t) = E_0 \cos \omega t = \frac{1}{2} E_0 [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}]$ → nebo místo exponenciely $\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2}$

$$\boxed{P^{(2)} = \varepsilon_0 \chi^{(2)} E^2 = \varepsilon_0 \chi^{(2)} \frac{E_0^2}{4} [e^{2i\omega t} + e^{-2i\omega t} + 2] = \frac{\varepsilon_0 \chi^{(2)} E_0^2}{2} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \chi^{(2)} E_0^2 \cos 2\omega t \sim \Delta E^{(2)}}$$

příspěvek vyvolaný polarizací

⇒ v materiálu vzniká polarizace 2. řádu která má 2 složky: stejnoměrná složka, složka oscilující s frekvencí $2\omega$, je možné aby dipóly oscilující s fr. $2\omega$ v jedn. místech látky

látky se na výstupu objevila silná vlna 2. harmonické frekvence, konstruktivně skládaly hl. problém představuje závislost indexu lomu na frekvenci. V místě, kde vlna o frekvenci $\omega$ generuje vlnu o frekvenci $2\omega$ → jsou obě koherentní. Vlna o fr. $\omega$ postupuje dále látkou a generuje další příspěvky o frekvenci $2\omega$, které se musí složit konstruktivně (tj. musí mít odpovídající fázový rozdíl!)




1+2 → konstruktivní interference vln $2\omega$ vzniklých v místech $z_1$ a $z_2$

v místě $z$ je dopadající vlna: $E(z,t) = \frac{1}{2} E_0 [e^{i(k_1 z - \omega t)} + e^{-i(k_1 z - \omega t)}]$ a její příspěvek vyvolaný polariz. (oscilující část) $\Delta E^{(2)}(z) \approx P^{(2)} \sim E_0^2 [e^{2i(k_1 z - \omega t)} + e^{-2i(k_1 z - \omega t)}]$

vlna 2. harm. vzniklá v místě $z$ bude mít na výstupu (bod $L$) z krystalu fázi danou šířením od místa $z$ do místa $L$ s vln. vektorem $k_2$ tedy: $\Delta E^{(2)}(L)\big|_z = E_0^2 e^{2i(k_1 z - \omega t)} e^{ik_2(L - z)}$ ↳ navíc fáz. rozdíl $\Delta\varphi = k_2(L - z)$

Celková amplituda 2. harmonických v místě $L$ dostaneme součtem všech příspěvků $\Delta E^{(2)}(L)\big|_z$ z daného místa

+c.c. → komplexně sdružené části nemusím uvažovat (chovají se podobně když ~ a stejně chci jen podmínku sfázování ? ☺)

$$\boxed{E^{(2)}(L) \sim E_0^2 e^{-2i\omega t} e^{ik_2 L} \int_0^L e^{i(2k_1 - k_2)z}\, dz}$$

$$\Delta k = 2k_1 - k_2$$

$$\int_0^L e^{i\Delta k z} dz = \frac{1}{i\Delta k}(e^{i\Delta k L} - 1) = \frac{e^{i\frac{\Delta k L}{2}}}{i\Delta k}\left(e^{i\frac{\Delta k L}{2}} - e^{-i\frac{\Delta k L}{2}}\right)$$

$$= \frac{2i L \sin\frac{\Delta k L}{2}}{L\, i\Delta k} e^{i\frac{\Delta k L}{2}} = L \frac{\sin\frac{\Delta k L}{2}}{\frac{\Delta k L}{2}} e^{i\frac{\Delta k L}{2}} \Rightarrow E^{(2)}(L) : E_0^2 L \frac{\sin\frac{\Delta k L}{2}}{\frac{\Delta k L}{2}} e^{i\frac{\Delta k L}{2}} e^{-2i\omega t} e^{ik_2 L}$$

$$\Rightarrow \boxed{I \sim I_0^2 L^2 \left(\frac{\sin\frac{\Delta k L}{2}}{\frac{\Delta k L}{2}}\right)^2}$$

maximum pro $\frac{\Delta k L}{2} = 0 \Rightarrow \Delta k = 0 \Rightarrow \boxed{2k_1 = k_2}$ **podmínka sfázování**

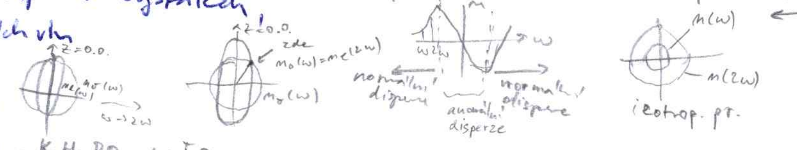
→ $k_1 = \frac{\omega}{c} n(\omega)$, $k_2 = \frac{2\omega}{c} n(2\omega)$

$\frac{2\omega}{c} n(\omega) = \frac{2\omega}{c} n(2\omega)$ ⇓ $\boxed{n(\omega) = n(2\omega)}$

v izotrop. materiálech s normální disperzí nelze splnit

→ podm. sfázování je možné splnit v anizotropních krystalech když se vhodně zvolí polarizace interagujících vln

(např. dopadající vlna se šíří jako vlna řádná, druhá harmonická jako vlna mimořádná)




⇒ krystaly pro generaci 2. harm. $LiNbO_3$, $KH_2PO_4$, $LiIO_3$

## NELIN. OPT. JEVY 3. ŘÁDU

(vyskytují se ve všech látkách, tj. i v látkách se středem symetrie)

$$E(t) = E_0 \cos \omega t = \frac{1}{2} E_0 (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

$$= \frac{1}{8} \varepsilon_0 \chi^{(3)} E_0^3 [e^{3i\omega t} + e^{-3i\omega t} + 2e^{i\omega t} + 2e^{-i\omega t} + e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}]$$

$$= \frac{1}{8} \varepsilon_0 \chi^{(3)} E_0^3\, 2 \cos 3\omega t + \frac{3}{8} \varepsilon_0 \chi^{(3)} E_0^3 \cos \omega t$$

$$\boxed{P^{(3)} = \varepsilon_0 \chi^{(3)} E^3} = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \frac{1}{8} E_0^3 (e^{2i\omega t} + e^{-2i\omega t} + 2)(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) = \boxed{\underbrace{\frac{1}{4} \varepsilon_0 \chi^{(3)} E_0^3 \cos 3\omega t}_{\text{generace 3. harm. frekvence}} + \underbrace{\frac{3}{4} \varepsilon_0 \chi^{(3)} E_0^3 \cos \omega t}_{\text{závislost indexu lomu a absorpčního koeficientu na intenzitě světla}}}$$

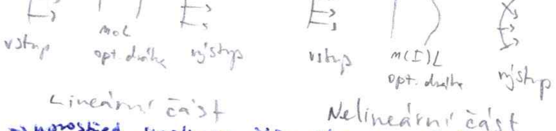
$n(I)$
$\alpha(I)$

$$\boxed{\begin{aligned} n &= n_L + n_{NL}(I) \\ \alpha &= \alpha_L + \alpha_{NL}(I) \end{aligned}}$$

důsledky intenzitní závislosti indexu lomu:


laserový svazek → připomíná Gaussovské rozložení intenzity ve směru kolmém na směr šíření ($x$) po průchodu látkou, jejíž index lomu je dán:

$n = n_L + \frac{1}{2} n_L I$ → vlna uprostřed svazku má jiný index lomu než vlna na krajích (liší se opt. dráhy)



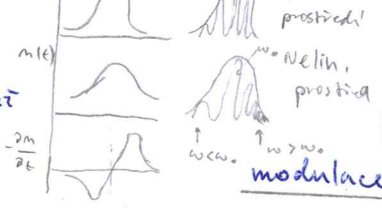

Lineární část    Nelineární část

→ uprostřed svazku se šíří vlna pomaleji (větší index lomu) než na krajích → prostředí působí jako spojná čočka

= samofokusace

laserový svazek může být modulován v čase. Je-li odezva prostředí rychlá, sleduje index lomu intenzitní profil v čase

okamžitá frekvence světelné vlny je dána čas. derivací fáze




$\varphi = k_0 n(t) z - \omega_0 t$

$\omega = \left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right| = \left| -\omega_0 + k_0 z \frac{\partial n(t)}{\partial t} \right|$ // $\left| -(\omega_0 - \frac{\partial n(t)}{\partial t}) \right|$

$$\boxed{\omega = \omega_0 - k_0 z \frac{\partial n}{\partial t}}$$

**modulace fáze**

# 11 ANIZOTROPNÍ PROSTŘEDÍ (neabsorbující prostředí) – lineární dvojlom (pro izotropní látky $\chi$ ... skalár $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$, $\vec{P} \parallel \vec{E}$ !)

předpokládáme homogenní, lineární, neabsorbující prostředí bez kruhového dvojlomu, nemagnetické $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

vektor polarizace: ↳ $\overleftrightarrow{\chi}$ nezávisí na ↳ $\vec{P} \cdot \vec{E}$ ↳ $\overleftrightarrow{\chi}$ reálný a symetrický

$$\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\chi} \vec{E}}$$ udává odezvu materiálu ve složkách $P_i = \sum_{j=x,y,z} \chi_{ij} E_j$

$\overleftrightarrow{\chi}$ ... tenzor susceptibility

z Poyntingova teorému lze ukázat, že pro neabsorbující prostředí bez optické aktivity (tj. bez kruhového dvojlomu) je $\overleftrightarrow{\chi}$ reálný a symetrický ⇒ lze ho diagonalizovat

$$\boxed{\overleftrightarrow{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_x & 0 & 0 \\ 0 & \chi_y & 0 \\ 0 & 0 & \chi_z \end{pmatrix}} \qquad \boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}} = \overleftrightarrow{\varepsilon} \vec{E}$$

$\overleftrightarrow{\varepsilon}$ ... tenzor permitivity

$$D_x = \varepsilon_0 \varepsilon_x E_x = \varepsilon_0 (1+\chi_x) E_x = \varepsilon_0 \varepsilon_x E_{0x} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-i\omega t}$$
$$D_y = \varepsilon_0 \varepsilon_y E_y = \varepsilon_0 (1+\chi_y) E_y = \varepsilon_0 \varepsilon_y E_{0y} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-i\omega t}$$
$$D_z = \varepsilon_0 \varepsilon_z E_z = \varepsilon_0 (1+\chi_z) E_z = \varepsilon_0 \varepsilon_z E_{0z} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-i\omega t}$$


předp. rovinná homogenní elmg. vlna s vlnovým vektorem $\vec{k} = \frac{\omega}{c} n \vec{s}_0$ kolmým na rovinu vlnoploch

látka reaguje na působení vlny okamžitě (nedochází k fáz. posunu čas. průběhu vektoru polarizace $\vec{P}(\vec{r},t)$ vůči vlně $\vec{E}(\vec{r},t)$) ⇒ potom můžeme psát

jedn. vekt. ve směru vlnoploch (tj. konst. fáze)

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \qquad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \qquad \vec{P} = \vec{P}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

z Max-ových rovnic:

$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{D}$ $\quad \operatorname{div}\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = i(k_x D_{0x} + k_y D_{0y} + k_z D_{0z}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} = i\vec{k}\cdot\vec{D} = i\vec{k}\cdot(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = 0$ → izotropní látky $\vec{k}\cdot\vec{E} = 0$ (prostředí bez volných nábojů)

obecně v anizotropních látkách nemusí být vektory $\vec{E}$ a $\vec{P}$ paralelní, ale ve spec. případy $\vec{k}\cdot\vec{E} \neq 0$

$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{B}, \vec{k} \perp \vec{H}$ $\quad \operatorname{div}\vec{B} = i\vec{k}\cdot\vec{B} = 0 \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

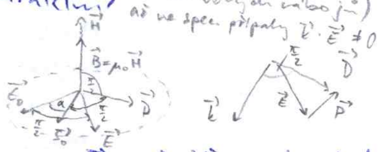
$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{B}$ $\quad \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \to i(k_y E_z - k_z E_y) = i\omega B_x$

$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow H \perp D,\ k \perp D$ $\quad \vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D}$

⇒ celkově $\vec{B}$ (tedy i $\vec{H}$) $\perp \vec{E}, \vec{D}, \vec{k}$ dále $\vec{k} \perp \vec{D}$ ale už obecně ~~$\vec{k} \perp \vec{E}$~~

v důsledku $\vec{E} \nparallel \vec{D}$ se energie šíří v jiném směru než vlnoplochy

$\frac{\omega}{c} n \vec{s}_0 = \vec{k}$ ... kolmý na vlnoplochy $\qquad \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = S \vec{t}_0$




$\vec{s}_0$ ... směr šíření vlnoploch

$\vec{t}_0$ ... směr šíření energie

svírají úhel $\alpha$

## FRESNELOVA ROVNICE

$$\boxed{\frac{1}{n^2} = \frac{s_{0x}^2}{n^2 - n_1^2} + \frac{s_{0y}^2}{n^2 - n_2^2} + \frac{s_{0z}^2}{n^2 - n_3^2}}$$

$n_1, n_2, n_3$

x-ová složka: $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \to \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial D_x}{\partial t}$

$\frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{1}{\mu_0 \omega}\left(k_x \frac{\partial E_y}{\partial y} - k_y \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \to = \frac{i}{\mu_0\omega}(k_x k_y E_y - k_y^2 E_x)$

$\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{1}{\mu_0\omega}\left(k_z \frac{\partial E_x}{\partial z} - k_x \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \to = \frac{i}{\mu_0\omega}(k_z^2 E_x - k_x k_z E_z)$

$(\vec{s}_0 \cdot \vec{E}) \neq 0$ $\quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \to \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ $\Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu_0\omega}(\vec{k} \times \vec{E}) \Rightarrow H_z = \frac{1}{\mu_0\omega}(k_x E_y - k_y E_x)$

$H_y = \frac{1}{\mu_0\omega}(k_z E_x - k_x E_z)$

$(n^2 - n_1^2) E_x = n^2 s_{0x} (\vec{s}_0 \cdot \vec{E}) \quad / \cdot s_{0x}$

(1) $s_{0x} E_x = \frac{n^2}{n^2 - n_1^2} s_{0x}^2 (\vec{s}_0 \cdot \vec{E})$

(2) $s_{0y} E_y = \frac{n^2}{n^2 - n_2^2} s_{0y}^2 (\vec{s}_0 \cdot \vec{E})$

(3) $s_{0z} E_z = \frac{n^2}{n^2 - n_3^2} s_{0z}^2 (\vec{s}_0 \cdot \vec{E})$

(1)+(2)+(3) $\cancel{\vec{s}_0 \cdot \vec{E}} = n^2 \left( \frac{s_{0x}^2}{n^2 - n_1^2} + \frac{s_{0y}^2}{n^2 - n_2^2} + \frac{s_{0z}^2}{n^2 - n_3^2} \right) \cancel{(\vec{s}_0 \cdot \vec{E})}$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{i}{\mu_0\omega}(k_x k_y E_y + k_x k_z E_z - k_y^2 E_x - k_z^2 E_x) = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_x E_x \quad \left(= \frac{\partial D_x}{\partial t}\right)$$

$$k_x(k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z) - k_x^2 E_x - k_y^2 E_y - k_z^2 E_z = -\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_x E_x \quad / + k_x^2 E_x - k_x^2 E_x$$

$$\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{E}) - k^2 \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \overleftrightarrow{\varepsilon} \vec{E} \qquad / : \frac{\omega^2}{c^2}$$

označme: $\varepsilon_x = n_1^2$, $\varepsilon_y = n_2^2$, $\varepsilon_z = n_3^2$ $\quad (\varepsilon_r = n^2)$

$$\frac{\omega^2}{c^2} n^2 s_{0x} (\vec{s}_0 \cdot \vec{E}) - \frac{\omega^2}{c^2} n^2 E_x = -\frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 E_x$$

Fresnelova rovnice určuje index lomu $n$, se kterým se šíří rovinná vlna s obecně orientovaným vln. vekt. $\vec{k}$ ($\vec{s}_0$) anizotropním prostředím

$n_1 \neq n_2 \neq n_3$ ... dvojosé materiály → 2 optické osy ⇒ popis výrazně složitější (budeme se dále zabývat pouze)

$n_1 = n_2 \neq n_3$ ... jednoosé materiály → 1 optická osa $\qquad n_1 = n_2 = n_3$ ... izotropní prostředí

optická osa = směr, ve kterém mají všechny lineární polarizace stejnou rychlost (fázovou)

pro jednoosé materiály označme: $\boxed{a = n_1^2 - n^2 \quad b = n_3^2 - n^2}$ → Fresnelova rovnice přejde do tvaru

$$\frac{1}{n^2} = \frac{s_{0x}^2}{(-a)} + \frac{s_{0y}^2}{(-a)} + \frac{s_{0z}^2}{(-b)}$$

$-\frac{a^2 b}{n^2} = ab s_{0x}^2 + ab s_{0y}^2 + a^2 s_{0z}^2$

$\to a[ab + n^2(b s_{0x}^2 + b s_{0y}^2 + a s_{0z}^2)]$

$$\boxed{a[ab + n^2(a s_{0z}^2 + b s_{0x}^2 + b s_{0y}^2)] = 0}$$

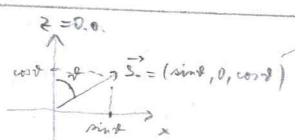
→ 2 řešení:

1) $a = 0$ $\quad 0 = n_1^2 - n^2 \Rightarrow n = n_1 = n_0$ ... řádný (ordinarius) (nezávisí na směru $\vec{s}_0$)

2) $n_e$ ... mimořádný (extraordinarius) ... jiné na $\vec{s}_0$ závisí (řešení v rovině xz)

jelikož je jednoosý krystal rotačně symetrický můžeme zvolit jakoukoliv rovinu obsahující opt. osu

$n = n_e = f(\vartheta)$




$$ab + n^2(a s_{0z}^2 + b s_{0x}^2 + \cancel{b s_{0y}^2}) = 0$$
$$ab + n^2(a s_{0z}^2 + b s_{0x}^2) = 0$$
$$(n_1^2 - n_e^2)(n_3^2 - n_e^2) + (n_1^2 - n_e^2) n_e^2 \cos^2\vartheta + (n_3^2 - n_e^2) n_e^2 \sin^2\vartheta = 0$$
$$\to n_1^2 n_3^2 - n_e^2 [n_1^2 (1 - \cos^2\vartheta) + n_3^2 (1 - \sin^2\vartheta)] = 0$$

$$\frac{1}{n_e^2} = \frac{\cos^2\vartheta}{n_1^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{n_3^2} \to 1 = \frac{n_e^2 \cos^2\vartheta}{n_1^2} + \frac{n_e^2 \sin^2\vartheta}{n_3^2} \qquad x_e = n_e \sin\vartheta \quad z_e = n_e \cos\vartheta$$

$$\boxed{\frac{x_e^2}{n_3^2} + \frac{z_e^2}{n_1^2} = 1}$$ ⇒ elipsa v osové poloze

a po úpravách

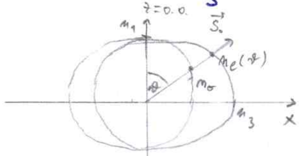
$n_3$ ... hl. poloosa ve sm. x

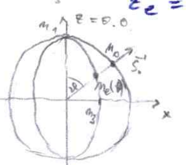
$n_1$ ... vedl. poloosa ve sm. z

díky osové symetrii:

$$\boxed{\frac{x_e^2}{n_3^2} + \frac{y_e^2}{n_3^2} + \frac{z_e^2}{n_1^2} = 1}$$

(rovnice rotačního elipsoidu)




kladný krystal ($n_e > n_0$) $\qquad$ záporný krystal ($n_e < n_0$)

$n_1$ ... hlavní řádný (o) index lomu

$n_3$ ... hlavní mimořádný (e) index lomu

normálová plocha (indexové plocha) $\xrightarrow{\text{přenásobení } \frac{\omega}{c}}$ k – plocha

↳ výsledek kulová / elipsoidální plocha

## polarizace řádné a mimořádné vlny

→ dosadíme řešení do Fresnelových rovnic

1) řádná vlna $n_0 = n_1$ $\quad \vec{s}_0 = (\sin\vartheta, 0, \cos\vartheta)$

(1) $(n_1^2 - n_0^2) E_x = n_1^2 \sin\vartheta (E_x \sin\vartheta + E_z \cos\vartheta) = 0 \Rightarrow E_x \sin\vartheta + E_z \cos\vartheta = 0$

(2) $(n_1^2 - n_1^2) E_y = 0 \qquad 0 = 0 \Rightarrow$ nic

(3) $(n_1^2 - n_3^2) E_z = n_1^2 \cos\vartheta (E_x \sin\vartheta + E_z \cos\vartheta) \Rightarrow E_z = 0 \qquad E_x = 0$

$\Rightarrow \vec{E}_0 = (0, E_y, 0) \perp$ rovina hlavního řezu = rovina danou opt. osou a směrem šíření (rov. xz)

z $E_x \sin\vartheta + E_z \cos\vartheta = 0$ pro daný směr $\vartheta$ $\frac{E_x}{E_z}$ = konst. tj. vlna lineárně polarizovaná

2) mimořádná vlna $n = n_e$ pro $n_1 = n_2$

(1) $(n_e^2 - n_1^2) E_x = n_e^2 \sin\vartheta (E_x \sin\vartheta + E_z \cos\vartheta)$ $\quad \cdot \sin\vartheta$

(2) $(n_e^2 - n_1^2) E_y = 0 \Rightarrow E_y = 0$

(3) $(n_e^2 - n_3^2) E_z = n_e^2 \cos\vartheta (E_x \sin\vartheta + E_z \cos\vartheta)$ $\quad \cdot \cos\vartheta$

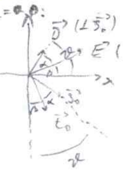
$+ \Rightarrow \frac{E_x}{E_z} = -\frac{n_3^2}{n_1^2} \cot\vartheta$

pro daný směr $\vartheta$ konst. ⇒ také lin. pol. vlna

$E_y = 0$ $\quad \vec{E}_e$ kmitá v rovině xy (tj. rovině hl. řezu)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_0 \perp \vec{E}_e}$$

energie nesená vlnou se šíří ve směru Poyntingova vektoru $\vec{S} = S\vec{t}_0$ → řádná vlna $\vec{S} \parallel \vec{s}_0$, mimořádná svírají úhel $\alpha$

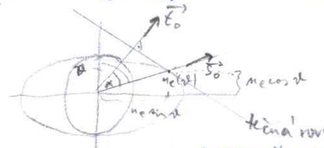



$D_x = \varepsilon_0 n_1^2 E_x$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\beta = \frac{E_z}{E_x}$

$D_z = \varepsilon_0 n_3^2 E_z$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{D_z}{D_x}$

$\frac{D_z}{D_x} = \frac{n_3^2}{n_1^2}\frac{E_z}{E_x} \Rightarrow \operatorname{tg}\vartheta = \frac{n_3^2}{n_1^2}\operatorname{tg}\beta$

$\alpha = \vartheta - \beta$




směr šíření energie $\vec{t}_0$ je určen normálou k tečné rovině normálové plochy

$v_r = \frac{v_f}{\cos\alpha}$ ... rychlost šíření energie mimoř. vlny

$v_f$ ... fáz. rychl. m. vlny

normálová plocha $F(x,y,z) = 0$ ... rotační elipsoid

normála k tečné rovině normálové plochy: $\vec{N}(x,y,z) = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)_{x_0,y_0,z_0}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$

## Lom na rozhraní s anizotropním jednoosým prostředím

→ dopadající vlna $\vec{k}_i$ se rozdělí na dvě lomené vlny $\vec{k}_{t_o}$ ... $n_o$, $\vec{k}_{te}$ ... $n_e(\theta_{te})$

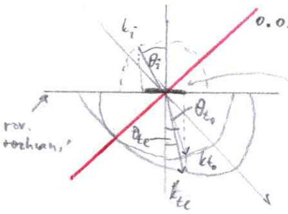
platí zákon lomu: $n_i \sin\theta_i = n_o \sin\theta_{to}$ (řádná vlna)

$n_i \sin\theta_i = n_e(\vartheta) \sin\theta_{te}$ (mimořádná vlna) $\qquad \vartheta = f(\theta_{te})$ + Fresnelova rovnice

spojitost fází el. pole dopadající a lomené vlny (podmínka návaznosti vlnoploch → použita při odvození zák. lomu)

$(\vec{k}_{t_o} - \vec{k}_i)\cdot\vec{r} = (\vec{k}_{te} - \vec{k}_i)\cdot\vec{r} = 0$, $\vec{r}$ .. vektor ležící v rov. rozhraní → tečné složky vl. vekt. $\vec{k}_i, \vec{k}_{to}, \vec{k}_{te}$ jsou tedy stejné

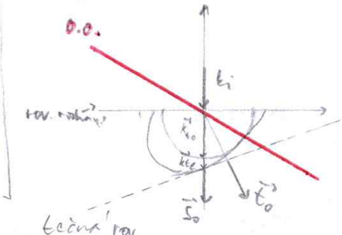
normálové plochy $\xrightarrow{\frac{\omega}{c}}$ k-plochy

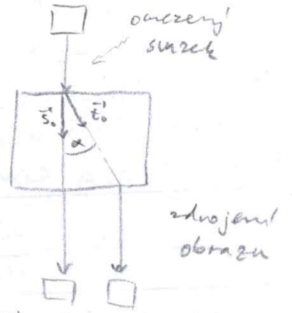



1) provedeme řez k-plochou v rov. dopadu
2) nakreslíme průsečnici s rov. rozhraní
3) vyznačíme vln. vektor dopadající vlny $\vec{k}_i$
4) stanovíme průmět $\vec{k}_i$ do rov. rozhraní
vzhledem k rovnosti tečných složek $\vec{k}_i, \vec{k}_o, \vec{k}_{te}$ vyznačíme stejně velký průmět do rov. rozhraní a z něj určíme příslušné průsečíky s k-plochami

ty určují směry obou lomených paprsků

případ kolmého dopadu $\theta_i = 0$



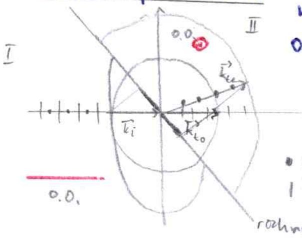




## POUŽITÍ DVOJLOMNÝCH LÁTEK

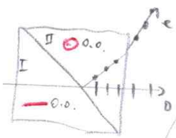
→ zpravidla k přípravě pol. světla nebo ke změně jeho stavu

### Rochonův polarizátor

- ze dvou částí spojených opt. tmelem nebo vzduchovou mezerou
- o.o. v každé části jinou orientaci



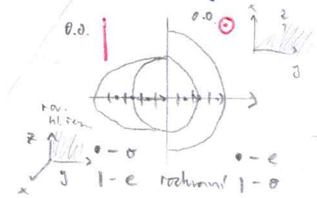

• mimoř. - e
| řádný - o

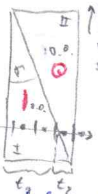



### Babinetův kompenzátor

- 2 klíny z dvojlom. mat. s opt. osami na sebe ⊥ s malým vrcholovým úhlem ⇒ zanedbáme lom

(kompenzátory = opt. prvky umožňující nastavit libovolné $\Delta\varphi$ mezi o. a e. vlnou mechanickým posuvem dvou klínů z dvojlomného materiálu)




posun klínů vůči sobě

$\Delta\varphi$ závisí na tloušťkách $t_1, t_2$ ($t_2$ lze měnit posunem klínů)

vlna 1 (v I: o, v II: e): $\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_o t_1 + n_e t_2)$

vlna 2 (v I: e, v II: o): $\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e t_1 + n_o t_2)$

fáz. rozdíl: $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e - n_o)(t_2 - t_1)$

### Fázová destička

– mění pol. stav světla

o.o. rovnoběžná se vstupní plochou (2 kolmé lin. pol. různé rychlosti v různých směrech) → fáz. posuv $\boxed{\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_o = (k_e - k_o)d = \frac{\omega}{c}(n_3 - n_1)d}$

světlo dopadá na fáz. destičku kolmo (nedochází k lomu) a obě vlny se šíří stejným směrem a jelikož dopadají kolmo i na opt. osu nedojde k jejich prostorovému oddělení ⇒ opět se složí v jednu vlnu se změněným pol. stavem

$\frac{\lambda}{4}$ destička → $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\qquad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$

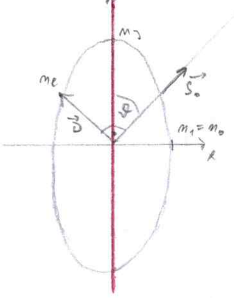
$\frac{\lambda}{2}$ destička → $\Delta\varphi = \pi$ $\qquad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{2} = \pi$

## OPTICKÁ INDIKATRIX

– alternativní popis šíření světla v anizotrop. pr. pomocí indexového elipsoidu (indikatrix)

normálová (indexová) plocha – vyjadřuje velikost indexu lomu nebo k-plocha velikost vektoru $\vec{k}$ daném jedn. vektorem $\vec{s}_0$

indexový elipsoid (optická indikatrix) – vyjadřuje závislost indexu lomu na směru vektoru elektrické indukce $\vec{D}$ ($\vec{D} \perp \vec{k}$)




$w_e = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} = \frac{1}{2}(E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z) = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z}\right)$ $\qquad D_x = \varepsilon_0\varepsilon_x E_x$, $\varepsilon_x = n_1^2$

$\frac{D_x^2}{n_1^2} + \frac{D_y^2}{n_2^2} + \frac{D_z^2}{n_3^2} = 2\varepsilon_0 w_e \xrightarrow{\text{normování } 2\varepsilon_0 w_e = 1} \boxed{\frac{D_x^2}{n_1^2} + \frac{D_y^2}{n_2^2} + \frac{D_z^2}{n_3^2} = 1}$

normálová plocha: řádná vlna → koule, mimoř. vlna → elipsoid

↳ indikatrix je elipsoid poskytující informace zároveň o řádné i mimořádné vlně
↳ je oproti elipsoidu normálové plochy natočen o 90°