

Jméno:

1	2	3	4	Σ

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
6. 6. 2025

Čas: 90 minut.

- *Podepište všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
 - *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
 - *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
 - *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
 - *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
 - *Je-li výsledkem aritmetický výraz, jako třeba $(x - 5)^2 + 10x + \binom{6}{2} - 3$, nemusíte ho zjednodušovat.*
 - *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak. Musíte však uvést, které tvrzení používáte.*
-

1. Uvažujme funkci $f(x) = |x|(x^2 - x)$ definovanou na \mathbb{R} .
- (a) [3 b.] Má tato funkce derivaci v bodě $x = 0$? Má v tomto bodě aspoň jednostranné derivace?
 - (b) [3 b.] Najděte všechny lokální a globální extrémy této funkce a určete, o jaký druh extrému se jedná (zda globální či jen lokální, zda minimum nebo maximum).
 - (c) [4 b.] Najděte maximální intervaly, na nichž je tato funkce konvexní, a maximální intervaly, na nichž je konkávní.
2. (a) [3 b.] Definujte, co je *hromadný bod* posloupnosti čísel.
- (b) [4 b.] Nechtě $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost taková, že každé přirozené číslo je jejím hromadným bodem. Dokažte, že $+\infty$ je také hromadný bod (a_n) .
- (c) [3 b.] Určete všechny hromadné body posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ definované vztahem

$$b_n = \frac{3n^2 + (-1)^n n^2}{\sin(n^2) + 5n^2}.$$

3. (a) [3 b.] Definujte, co to znamená, že funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je *spojitá* v bodě $A \in \mathbb{R}$, a co znamená, že funkce je *spojitá* na intervalu I .
- (b) [3 b.] Zformulujte větu o nabývání extrémů pro spojitě funkce, též známou jako princip maxima. Nemusíte ji dokazovat.
- (c) [4 b.] Uvažujme funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou takto:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ x & \text{pro } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Určete (a nezapomeňte zdůvodnit), v kterých bodech je tato funkce spojitá.

4. (a) [3 b.] Napište, co je dělení intervalu a jak je definována *horní* a *dolní Riemannova suma* pro dané dělení.
- (b) [3 b.] Napište, jak je definována křivka v \mathbb{R}^d , a uveďte vzorec pro výpočet délky takové křivky.
- (c) [4 b.] Spočítejte délku křivky

$$K = \{(\sin(t), \cos(t), t) \in \mathbb{R}^3; t \in [0, 2\pi]\}.$$