Jméno:

1	2	3	4	$\sum$

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I

5. 9. 2025

Čas: 90 minut.

- *Podepište všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
- *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
- *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
- *Je-li výsledkem aritmetický výraz, jako třeba* $(x-5)^2 + 10x + \binom{6}{2} - 3$, *nemusíte ho zjednodušovat.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak. Musíte však uvést, které tvrzení používáte.*

---

1. Definujme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} |x| \cdot \exp\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

kde $\exp(x)$ označuje exponenciální funkci, též značenou e^x.

(a) [4 b.] Určete limity funkce f v $+\infty$ a v $-\infty$. Určete obě jednostranné limity funkce f v nule. Je funkce f spojitá v nule?

(b) [3 b.] Najděte všechny lokální a globální extrémy funkce f a určete, o jaký typ extrému se jedná (zda globální či jen lokální, zda minimum či maximum).

(c) [3 b.] Dokažte, že f je konvexní na intervalu $(-\infty, 0)$ i na intervalu $(0, +\infty)$. Dokažte, že f naopak není konvexní na $\mathbb{R}$.

2. (a) [3 b.] Definujte formálně, co znamená, že posloupnost reálných čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ není shora omezená.

(b) [4 b.] Mějme posloupnost reálných čísel $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, která nemá vlastní ani nevlastní limitu. Dokažte, že (b_n) má podposloupnost, která má právě dva hromadné body.

(c) [3 b.] Pro přirozené číslo n označme $\mathrm{j}(n)$ a $\mathrm{d}(n)$ počet jedniček a počet dvojek v desítkovém zápisu čísla n (tedy například $\mathrm{j}(2025) = 0$ a $\mathrm{d}(2025) = 2$). Definujme posloupnost $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ předpisem $c_n = \frac{1+\mathrm{j}(n)}{1+\mathrm{d}(n)}$. Najděte limes superior a limes inferior posloupnosti (c_n).

3. (a) [3 b.] Napište, jak je definován Taylorův polynom řádu n funkce f v bodě $A \in \mathbb{R}$.

(b) [3 b.] Najděte Taylorův polynom řádu 2 v bodě 3 funkce $f(x) = x^2 \cos(x)$.

(c) [4 b.] Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce, která má v každém bodě vlastní derivace všech řádů. Předpokládejme, že Taylorův polynom řádu 2 v bodě 0 funkce f je roven $3x^2 + 2x + 1$. Plyne z toho, že funkce $f(x^2)$ má v bodě 0 Taylorův polynom řádu 4 rovný $3x^4 + 2x^2 + 1$?

4. (a) [3 b.] Napište, co znamená, že funkce f je na intervalu (A, B) *newtonovsky integrovatelná*, a definujte *Newtonův integrál* $(N)\int_A^B f$ takové funkce.

(b) [3 b.] Předpokládejme, že funkce f je spojitá na intervalu $(-2, 2)$. Plyne z toho, že f je na intervalu $(-2, 2)$ newtonovsky integrovatelná? Plyne z toho, že f je newtonovsky integrovatelná na intervalu $(-1, 1)$?

(c) [4 b.] Spočítejte

$$(N)\int_1^2 x^2 \sin(x^3)\, dx.$$