

Jméno:

1	2	3	4	Σ

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
30. 5. 2025

Čas: 90 minut.

- Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.
- Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.
- Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.
- Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.
- Svě odpovědi musíte zdůvodnit.
- Je-li výsledkem aritmetický výraz, jako třeba $(x - 5)^2 + 10x + \binom{6}{2} - 3$, nemusíte ho zjednodušovat.
- Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, je však nutno uvést, které tvrzení používáte.

-
1. Uvažujme funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou vzorcem $f(x) = \exp(x^3 - 3x^2)$, kde $\exp(x)$ označuje exponenciální funkci e^x .
 - (a) [3 b.] Má funkce f limity v $+\infty$ a $-\infty$? Pokud ano, čemu se rovnají?
 - (b) [3 b.] Najděte všechny body, v nichž funkce f nabývá lokální či globální extrémy, a určete, o jaký typ extrému se jedná (zda jen lokální nebo i globální, zda minimum nebo maximum).
 - (c) [4 b.] Spočítejte Taylorův polynom funkce f řádu 2 v bodě 1.
 2.
 - (a) [3 b.] Napište, jak je definována *limita* posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a co znamená, že limita je *vlastní*.
 - (b) [4 b.] Rozhodněte (a nezapomeňte zdůvodnit!), zda je následující tvrzení pravdivé: “Nechť $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce, která je spojitá na \mathbb{R} , a nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost, která má vlastní limitu L . Potom posloupnost $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ má limitu $f(L)$.”
 - (c) [3 b.] Jaká je limita posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definované vztahem $a_n = n^2 \cdot \sin(\frac{1}{n})$?
 3.
 - (a) [2 b.] Napište, jak je definována *derivace* funkce f v bodě $A \in \mathbb{R}$.
 - (b) [3 b.] Zformulujte Rolleovu větu týkající se hodnot derivace.
 - (c) [5 b.] Dokažte tu větu.
 4.
 - (a) [3 b.] Jak je definován Newtonův integrál funkce f na intervalu (A, B) ?
 - (b) [3 b.] Uved'te příklad funkce, která má Riemannův integrál na intervalu $[0, 1]$, ale nemá Newtonův integrál na intervalu $(0, 1)$. Nezapomeňte zdůvodnit, proč má váš příklad požadované vlastnosti.
 - (c) [4 b.] Spočítejte, jaký objem má rotační těleso vzniklé otáčením plochy pod grafem funkce $f(x) = 1 + |3x|$ na intervalu $[-2, 2]$ kolem osy x .