

1	2	3	4	Σ

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
27. 6. 2025

Čas: 90 minut.

- *Podepište všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
- *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
- *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
- *Je-li výsledkem aritmetický výraz, jako třeba $(x - 5)^2 + 10x + \binom{6}{2} - 3$, nemusíte ho zjednodušovat.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak. Musíte však uvést, které tvrzení používáte.*

1. Definujte funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(1 + \frac{1}{x}\right) & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

kde $\exp(x)$ označuje exponenciální funkci, též značenou e^x .

- [3 b.] V kterých bodech \mathbb{R} je funkce f spojitá? Pokud je v nějakém bodě nespojitá, je v tomto bodě aspoň spojitá zleva nebo zprava?
 - [4 b.] Určete, v kterých bodech má funkce f (vlastní či nevlastní) derivaci. Pokud v nějakém bodě derivaci nemá, určete zda má aspoň (vlastní či nevlastní) jednostranné derivace.
 - [3 b.] Najděte všechny body, v nichž f nabývá extrém, a určete, o jaký druh extrému se jedná (zda globální nebo jen lokální, zda minimum nebo maximum). Určete i limity f pro $x \rightarrow +\infty$ a $x \rightarrow -\infty$.
2. (a) [3 b.] Necht' $(a_n)_{n=1}^\infty$ je posloupnost reálných čísel. Napište formálně, co znamená, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^\infty$ má limitu $+\infty$.
- (b) [4 b.] Pro posloupnost reálných čísel $(b_n)_{n=1}^\infty$ uvažujme následující dvě vlastnosti:
 (A) Posloupnost $(b_n)_{n=1}^\infty$ má limitu $+\infty$.
 (B) Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené $n > n_0$ platí $b_n < b_{n+1}$.
 Je pravda, že každá posloupnost splňující vlastnost (A) také splňuje vlastnost (B)? A naopak, je pravda, že vlastnost (B) implikuje vlastnost (A)?
- (c) [3 b.] Definujme posloupnost $(c_n)_{n=1}^\infty$ předpisem $c_n = \frac{\sqrt{n}}{n+(-2)^n}$. Rozhodněte, zda má tato posloupnost limitu, případně určete její hodnotu.
3. (a) [3 b.] Zformulujte Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Nemusíte ji dokazovat.
- (b) [4 b.] Mějme kladné číslo $\varepsilon > 0$ a funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která má v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ derivaci splňující $f'(x) > \varepsilon$. Dokažte, že
- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$
- (Nápověda: můžete třeba nejdříve dokázat, že pro každé $x > 0$ platí $f(x) > f(0) + \varepsilon x$ a podobně pro $x < 0$.)
- (c) [3 b.] Ukažte, že v předchozím podpříkladu nelze předpoklad $f'(x) > \varepsilon$ nahradit předpokladem $f'(x) > 0$. Jinými slovy, najděte příklad funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která má v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ kladnou derivaci, ale neplatí pro ni $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nebo neplatí $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
4. (a) [3 b.] Napište, jak se definuje součet nekonečné řady $\sum_{n=1}^\infty a_n$. Vysvětlete, co znamená, že řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ je *konvergentní*.
- (b) [3 b.] Zformulujte integrální kritérium konvergence řad. Nemusíte ho dokazovat.
- (c) [4 b.] Rozhodněte, zda je řada $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ konvergentní.