

Jméno:

|   |   |   |   |          |
|---|---|---|---|----------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | $\Sigma$ |
|   |   |   |   |          |

---

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I  
25. 6. 2025

---

Čas: 90 minut.

- *Podepište všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
  - *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
  - *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
  - *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
  - *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
  - *Je-li výsledkem aritmetický výraz, jako třeba  $(x - 5)^2 + 10x + \binom{6}{2} - 3$ , nemusíte ho zjednodušovat.*
  - *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak. Musíte však uvést, které tvrzení používáte.*
- 

1. Uvažujme funkci  $f(x) = |1 + x|(1 - x)^2$  definovanou na  $\mathbb{R}$ .
  - (a) [3 b.] Má tato funkce derivaci v bodě  $x = -1$ ? Má v tomto bodě aspoň jednostranné derivace?
  - (b) [3 b.] Najděte všechny lokální a globální extrémy této funkce a určete, o jaký typ extrému se jedná (zda jen lokální nebo i globální, zda minimum nebo maximum).
  - (c) [4 b.] Najděte co největší otevřený interval  $I$  obsahující nulu, na němž je  $f$  konvexní nebo konkávní. Určete, zda je  $f$  na tomto intervalu konvexní, či zda je tam konkávní.
2.
  - (a) [3 b.] Definujte, co je *hromadný bod* posloupnosti čísel a co je *limes superior* posloupnosti čísel.
  - (b) [4 b.] Pro posloupnost  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  uvažujme následující dvě vlastnosti:
    - (I) Posloupnost  $(a_n)$  není shora omezená.
    - (II)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .Jestliže pro posloupnost  $(a_n)$  platí vlastnost (I), plyne z toho, že pro ni platí i vlastnost (II)? A naopak, plyne z vlastnosti (II) vlastnost (I)?
  - (c) [3 b.] Definujme posloupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  vztahem  $a_n = \frac{3^n + (-n)^n + \ln(n+1)}{(\ln n)^n + (-1)^n}$ . Najděte všechny hromadné body této posloupnosti a rozhodněte, zda má tato posloupnost limitu.
3.
  - (a) [3 b.] Zformulujte l'Hospitalovo pravidlo pro výpočet limit. Nemusíte ho dokazovat.
  - (b) [3 b.] Najděte nezáporné celé číslo  $k \in \mathbb{N}_0$  takové, že limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2) - 1}{x^k}$$

bude nenulové reálné číslo, a určete, čemu se pro takové  $k$  bude limita rovnat.

- (c) [4 b.] Nechť  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce, která je diferencovatelná na  $\mathbb{R}$ , a nechť platí  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 100$ . Dokažte, že existuje  $A \in \mathbb{R}$  takové, že pro každé  $x \in (A, +\infty)$  platí  $99x < f(x) < 101x$ . (Nápověda: zde můžete například uvažovat limitu  $\frac{f(x)}{x}$  pro  $x \rightarrow +\infty$ .)
4.
    - (a) [3 b.] Definujte pojmy *dělení intervalu*  $[A, B]$ , *horní a dolní Riemannova suma* funkce  $f$  na intervalu  $[A, B]$  a *horní a dolní Riemannův integrál* funkce  $f$  na intervalu  $[A, B]$ .
    - (b) [3 b.] Zformulujte integrální kritérium pro konvergenci řad. Nemusíte ho dokazovat.
    - (c) [4 b.] Uvažujme funkci  $f(x) = x^2 \operatorname{sgn}(x)$ , kde funkce  $\operatorname{sgn}(x)$  je definována obvyklým způsobem:  $\operatorname{sgn}(x) = -1$  pro  $x < 0$ ,  $\operatorname{sgn}(0) = 0$  a  $\operatorname{sgn}(x) = 1$  pro  $x > 0$ . Je funkce  $f(x)$  riemannovsky integrovatelná na intervalu  $[-1, 2]$ ? Pokud ano, určete hodnotu  $(R) \int_{-1}^2 f$ .