

1	2	3	4	Σ

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
20. 6. 2025

Čas: 90 minut.

- *Podepište všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
- *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
- *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
- *Je-li výsledkem aritmetický výraz, jako třeba $(x - 5)^2 + 10x + \binom{6}{2} - 3$, nemusíte ho zjednodušovat.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak. Musíte však uvést, které tvrzení používáte.*

1. Pro nezáporné celé číslo $k \in \mathbb{N}_0$ definujme funkci $f_k(x)$ následovně:

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0 \\ \frac{\sin(x^k)}{x} & \text{pro } x \neq 0. \end{cases}$$

- [3 b.] Pro která $k \in \mathbb{N}_0$ je funkce f_k spojitá v bodě $x = 0$?
- [3 b.] Pro která $k \in \mathbb{N}_0$ je funkce f_k na \mathbb{R} omezená?
- [4 b.] Pro která $k \in \mathbb{N}_0$ má f_k (vlastní či nevlastní) derivaci v bodě $x = 0$ a čemu se ta derivace rovná?

Nezapomeňte své odpovědi zdůvodnit, včetně těch případů, kdy f_k nemá příslušnou vlastnost.

- [3 b.] Definujte, co je *hromadný bod* posloupnosti (a_n) .
 - [3 b.] Necht' $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n \leq c_n$. Jestliže je číslo $H \in \mathbb{R}$ hromadným bodem (a_n) i (c_n) , plyne z toho, že H je i hromadným bodem (b_n) ?
 - [4 b.] Najděte posloupnost, jejíž množina hromadných bodů je přesně rovna $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, a zdůvodněte, proč má vaše posloupnost požadovanou vlastnost.
- [3 b.] Definujte, co znamená, že funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je *spojitá* v bodě $A \in \mathbb{R}$, a co znamená, že funkce f je spojitá na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$.
 - [3 b.] Zformulujte větu o nabývání mezíhodnot pro spojitě funkce. Nemusíte ji dokazovat.
 - [4 b.] Rozhodněte, zda je pravdivé následující tvrzení:

“Jestliže f a g jsou dvě funkce spojitě na intervalu $[0, 1]$ splňující $f(0) < g(0)$ a $f(1) > g(1)$, pak nutně existuje $A \in (0, 1)$ takové, že $f(A) = g(A)$.”

- [3 b.] Definujme pro $x \in (0, +\infty)$ funkci

$$g(x) = \int_0^x \exp(t^2) dt.$$

Čemu se rovná derivace funkce $g(x)$ v bodě $x = 2$? (Zde není potřeba hledat vzorec pro samotnou funkci g , stačí jen určit její derivaci v tom konkrétním bodě $x = 2$.)

- [3 b.] Zformulujte větu o substituci pro výpočet primitivní funkce. Nemusíte ji dokazovat, nezapomeňte ale uvést předpoklady kladené na funkce, které v té větě vystupují. Znáte-li více verzí této věty, zformulujte kteroukoliv z nich.
- [4 b.] Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = \exp(\sin(x)) \sin(x) \cos(x)$.