

Jméno:

1	2	3	4	Σ

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I

2. 6. 2025

Čas: 90 minut.

- Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.
- Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.
- Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.
- Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.
- Svě odpovědi musíte zdůvodnit.
- Je-li výsledkem aritmetický výraz, jako třeba $(x - 5)^2 + 10x + \binom{6}{2} - 3$, nemusíte ho zjednodušovat.
- Tvzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak. Musíte však uvést, které tvzení používáte.

1. Definujte funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x^2 + \frac{1}{x}) & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

kde $\exp(\cdot)$ označuje exponenciální funkci.

- [3 b.] Rozhodněte, zda je tato funkce spojitá v bodě 0, případně zda je v tomto bodě aspoň spojitá zleva či zprava.
 - [3 b.] Najděte všechny lokální a globální extrémy této funkce a určete, o jaký druh extrému se jedná (zda globální či jen lokální, zda minimum nebo maximum).
 - [4 b.] Je tato funkce konvexní či konkávní na intervalu $(0, +\infty)$? Je tato funkce konvexní či konkávní na \mathbb{R} ?
2. (a) [3 b.] Zformulujte větu o dvou policajtech pro limity posloupností. Nemusíte ji dokazovat.
- (b) [4 b.] Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost čísel. Definujte posloupnost $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ předpisem

$$b_n = \frac{1}{3}(a_n + a_{2n} + a_{3n}).$$

Rozhodněte, zda platí následující tvzení:

“Pokud má posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ vlastní limitu L , pak i posloupnost $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ má nutně tutéž limitu L .”

- (c) [3 b.] Definujte posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vztahem

$$a_n = \frac{\ln(n^2 - (-1)^n)}{n}.$$

Rozhodněte, zda má tato posloupnost limitu, a případně určete její hodnotu.

- (a) [2 b.] Definujte, co znamená, že funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je *spojitá* v bodě $A \in \mathbb{R}$.
 - (b) [3 b.] Zformulujte Bolzanovu větu, která mluví o nulových hodnotách funkce.
 - (c) [5 b.] Dokažte tu větu.
4. (a) [3 b.] Najděte příklad funkce $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, která není na $(0, 1)$ newtonovsky integrovatelná, ale funkce $(f(x))^2$ na $(0, 1)$ newtonovsky integrovatelná je. Nezapomeňte zdůvodnit, proč má vaše funkce požadované vlastnosti.
- (b) [3 b.] Zformulujte pravidlo ‘per partes’ pro výpočet primitivní funkce. Nemusíte ho dokazovat.
- (c) [4 b.] Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = |x| \cdot e^x$ na \mathbb{R} . (Dejte pozor, aby vámi nalezená primitivní funkce opravdu fungovala na celém \mathbb{R} , tedy i v okolí nuly.)